

ANALES DE LA SOCIEDAD CIENTIFICA ARGENTINA

ADOPTADOS PARA SUS PUBLICACIONES POR LA
ACADEMIA NACIONAL DE CIENCIAS EXACTAS, FISICAS Y NATURALES

DIRECTOR: EMILIO REBUELTO

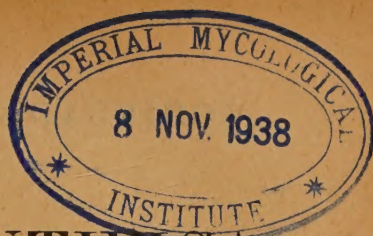
AGOSTO 1938. — ENTREGA II. — TOMO CXXVI

SUMARIO

	Pág.
SOCIEDAD CIENTIFICA ARGENTINA. — Sexagésimo sexto aniversario.....	81
Discurso del señor Presidente Ing. J. W. DOBRANICH	82
SECCION SANTA FE de la Sociedad Cientifica Argentina:	
<i>Sesión de comunicaciones del 21 Junio de 1938</i>	85
J. GOLLAN (H.) Y O. MALLEA. — Determinación de la capacidad de ad- sorción y bases intercambiables en los suelos	85
VÍCTOR S. NICOLLIER. — Límite líquido en suelo. - Comparación.....	85
GREGORIO KLEER. — Algunas rocas de Tierra del Fuego	86
GUSTAVO A. FESTER. — La Cordillera Darwin	87
JOSÉ CRUELLAS Y R. VALETTO. — Dosaje del manganeso con la formal- doxina	89
<i>Ciclo de conferencias:</i>	
Conferencia del Dr. JOAQUÍN FRENGUELLI. — Qué son y para qué sirven las diatomeas	91
MATEMATICAS:	
J. C. VIGNAUX. — Series simples y dobles de Dirichlet y de facultad asintónicas	97
FISICA:	
ADOLFO T. WILLIAMS. — Tablas de las líneas últimas	131
JOSÉ S. CORTI. — Nota necrológica	153
C. C. D. — Bibliografía	155

BUENOS AIRES
CALLE SANTA FE 1145

1938



SOCIEDAD CIENTIFICA ARGENTINA

SOCIOS HONORARIOS

Dr. Pedro Visca †
 Dr. Mario Isola †
 Dr. Germán Burmeister †
 Dr. Benjamín A. Gould †
 Dr. R. A. Phillippi †
 Dr. Guillermo Rawson †
 Dr. Carlos Berg †
 Dr. Valentín Balbín †
 Dr. Florentino Ameghino †

Dr. Carlos Darwin †
 Dr. César Lombroso †
 Ing. Luis A. Huergo †
 Ing. Vicente Castro †
 Dr. Juan J. J. Kyle †
 Dr. Estanislao S. Zeballos †
 Ing. Santiago E. Barabino †
 Dr. Carlos Spegazzini †
 Dr. J. Mendizábal Tamborel †

Dr. Enrique Ferri †
 Ing. Eduardo Huergo †
 Ing. Guillermo Marconi †
 Dr. Walter Nernst
 Dr. Eduardo L. Holmberg †
 Dr. Alberto Einstein
 Dr. Angel Gallardo †
 Dr. Cristóbal M. Hicken †

CONSEJO CIENTIFICO

Ing. Félix Agullar; Ing. José Babini; Dr. Rómulo D. Carbia; Dr. Horacio Damlanovich;
 Dr. Claro C. Dassen; Prof. Carlos E. Dicleufait; Dr. Juan A. Domínguez; Dr. Gustavo
 A. Fester; Dr. Alfredo Franceschi; Dr. Joaquín Frenguelli; Dr. Josué Gollán (h.);
 Dr. Bernardo A. Houssay; Dr. Cristofredo Jakob; Dr. Ramón G. Loyarte; Dr. Emi-
 liano J. Mac Donagh; Dr. R. Armando Marotta; Dr. Julio Méndez; Ing. Agr. Lorenzo
 R. Parodi; Dr. Franco Pastore; Capitán de fragata Héctor R. Ratto; Dr. Rodolfo
 Rivarola; Vicealmirante Segundo R. Storni; Dr. Enrique V. Zappi.

JUNTA DIRECTIVA

(1938-1939)

<i>Presidente</i>	Ingeniero Jorge W. Dobranich
<i>Vicepresidente 1º</i>	Doctor Ramón G. Loyarte
<i>Vicepresidente 2º</i>	Doctor Gonzalo Bosch
<i>Secretario de actas</i>	Ingeniero Raúl E. Dubecq
<i>Secretario de correspondencia.</i>	Doctor Santiago Barabino Amadeo
<i>Tesorero</i>	Ingeniero Edmundo Parodi
<i>Pro-tesorero</i>	Profesor José F. Molfino
<i>Bibliotecario</i>	Ingeniero Carlos A. Lizer y Trelles
	Doctor Claro C. Dassen
	Doctor Alfredo Sordelli
	Doctor Juan C. Vignaux
	Doctor Jorge Magnin
<i>Vocales</i>	Doctor Juan Ubaldo Carrea
	Doctor Reinaldo Vanossi
	Ingeniero Carlos Posadas
	Ingeniero Mario L. Negri

ADVERTENCIA.— Los colaboradores de los Anales son personalmente responsables de la tesis sustentada en sus escrito. Tienen derecho a la corrección de do pruebas. Los que deseen tirada aparte de 50 ejemplares de sus artículos, deben solicitarla por escrito. Los manuscritos, correspondencia, etc. se enviarán a la sede social, Santa Fe 1145.

SEXAGESIMO SEXTO ANIVERSARIO
DE LA
SOCIEDAD CIENTIFICA ARGENTINA

Para celebrar este aniversario de su fundación, el 30 de julio realizóse un almuerzo en el salón de su Biblioteca, al que concurrió crecido número de socios y varios invitados de honor.

Ocuparon la cabecera conjuntamente con los miembros de la Junta Directiva: el señor Presidente de la Comisión de Presupuestos y Hacienda de la Cámara de Diputados, Doctor RAÚL GODOY; el Presidente de la Comisión Protectora de Bibliotecas Populares, Doctor JUAN PABLO ECHAGÜE, y el señor Director General de Administrativa del Ministerio de Relaciones Exteriores y Culto, Doctor DÍVICO A. FÜRNKORN.

Al finalizar este ágape que se desarrolló en un ambiente de franca camaradería, conversándose de los temas más variados, el señor Presidente, Ingeniero JORGE W. DOBRANICH pronunció las palabras que transcribimos. Acto seguido el doctor RAÚL GODOY destacó, en una breve y elocuente improvisación, la obra que la Sociedad Científica venía realizando en pro de la cultura científica en nuestro país, comprometiéndose, desde su elevado cargo, a apoyar decididamente una mejora en la exigua subvención que le había acordado el Gobierno Nacional. Terminó su oportuna improvisación con las mismas palabras con que brindó el señor Presidente, que fueron celebradas por los concurrentes con una nutrida salva de aplausos.

Después de haberse retirado los invitados de honor, se realizó la Asamblea de socios, los cuales habían sido convocados con la debida anticipación, para tratar la reforma de los Estatutos, quedando aprobados por 51 votos sobre un total de 58 presentes.

Discurso del señor Presidente Ing. J. W. DOBRANICH

La Sociedad Científica Argentina acaba de cumplir 66 años de existencia desde su fundación en 1872, cuando la ciencia argentina no existía y el número de hombres que la cultivaban era asaz reducido.

De un grupo de jóvenes estudiantes de la incipiente Facultad de Ciencias Exactas, desprovistos de literatura técnica y científica, ante la escasez de libros en castellano y el costo privativo de aquellos escritos en otros idiomas, — también muy escasos — surgieron dos: Santiago Barabino y Luis Valiente Noailles, quienes habían de echar las bases de una asociación que reuniera a profesores y estudiantes con los propósitos siguientes:

« Formar una biblioteca de obras científicas, teóricas y aplicadas a la construcción en general, para uso de los estudiantes de nuestra Facultad;

« Dar cursos de repetición de las materias en estudio, como complemento de las lecciones de clase;

« Compilar los apuntes de las lecciones impartidas en sus aulas por los profesores ».

Aceptada la idea por sus condiscípulos, uno de ellos, Estanislao S. Zeballos asume la dirección y con amplias miras se propone transformar la proyectada asociación en *Academia Científica*: presenta las bases que, estudiadas por una Comisión designada con tal finalidad, las aprueba en la forma siguiente:

1º - Fomentar especialmente el estudio de las Ciencias matemáticas, físicas y naturales, con sus aplicaciones a las artes, a la industria y a las necesidades de la vida social.

2º - Estudiar las publicaciones, inventos o mejoras científicas, y especialmente las que tengan una aplicación práctica en la República Argentina.

3º - Reunir para este objeto a los ingenieros argentinos y extranjeros, a los estudiantes de ciencias exactas y a las demás personas cuya ilustración científica responda a los fines de esta corporación.

Al nombre de « Academia Científica de Buenos Aires o Argentina » le sucedió el de « Estímulo Científico », para sustituirse el 14 de julio de 1872 por el que hoy ostenta.

Después de tres reuniones preparatorias que presidió el ingeniero don Emilio Rosetti, tiene lugar el 28 del mismo mes de julio, la Asamblea en que queda solemnemente instalada la Sociedad Científica Argentina. Nómbrase la primera Junta Directiva para el ejercicio del año social 1872-73, recayendo la presidencia en el decano de los ingenieros argentinos, don Luis A. Huergo.

Largo e inoportuno sería enumerar en este ágape la obra que nuestra benemérita Sociedad ha realizado durante su larga y fecunda existencia. Me limitaré tan solo a echar una mirada retrospectiva para así poder apreciar el camino recorrido desde sus primeros balbuceos en la época de la organización nacional hasta este momento de plena evolución cultural.

Sin que el cariño pueda, a manera de cristal de aumento, hacernos ver agrandada la participación que la Sociedad Científica ha tenido en el progreso general de la cultura en nuestro país, justo es reconocer su valioso aporte, colaborando con estudios, iniciativas y trabajos; organizando exploraciones del suelo argentino; propulsando nuestra industria naciente; convirtiéndose en hogar intelectual para sapientes y hombres de estudio; engendrando nuevas sociedades que desplegaron una acción conjunta en beneficio de la República; organizando Congresos y concursos científicos que facilitaron un mejor conocimiento de nuestro país en el exterior; difundiendo sus ANALES y convirtiendo, finalmente, su bien dotada biblioteca en Biblioteca Popular.

Y ya que a ésta me he referido, permitidme que aproveche la circunstancia de acompañarnos el Sr. Presidente de la Comisión Protectora de Bibliotecas Populares, Dr. JUAN PABLO ECHAGÜE, honrándonos con su presencia, para expresar nuestra gratitud, rogándole la haga llegar a sus dignos colaboradores.

La Junta Directiva actual, alentada por el ejemplo de sus beneméritos antecesores, no mezquina esfuerzos para responder a la confianza que en sus componentes depositaron sus asociados y pese a las dificultades de orden económico con que siempre se ha tropezado, sigue con todo empeño tratando de convertir en realidad diversas iniciativas surgidas del seno de la misma.

Tales han sido, entre otras: la creación del Comité de Bibliotecarios — ya en plena labor — destinado a coordinar la suscripción y canje de revistas de carácter científico, técnico y profesional, para mejor conocer el material bibliográfico y aumentarlo, tratando de evitar las superposiciones en la mayoría de los casos.

Con igual tesón, la Junta Directiva se ocupa actualmente de or-

ganizar una Exposición de Instrumental Científico, con el propósito de dar a conocer toda la producción moderna de aquellos países que a su fabricación se dedican, excluyendo los instrumentos que solo pueden revestir un interés histórico.

Esta iniciativa cuenta con el apoyo moral del Ministerio de Justicia e Instrucción Pública, interesándose también por ellas las Embajadas extranjeras, así como los representantes de fábricas de reconocida fama mundial.

Estamos a la espera de una solución favorable de la parte prosaica de proyecto, la relativa a los fondos necesarios, solicitados al Superior Gobierno, para llevar a la práctica esta feliz iniciativa del Dr. REINALDO VANOSI, vocal de la Junta Directiva.

El interés que ella ha despertado, la trascendencia de la misma, los beneficios que reportará para estudiosos, gabinetes, laboratorios y Reparticiones Públicas; la posibilidad de conocer y apreciar las últimas conquistas en materia de instrumental técnico y científico, y la no menos importante de poderlo adquirir con mejor y más amplia información que aquélla que nos brindan catálogos y prospectos, nos permite abrigar la esperanza de ver convertido en realidad este proyecto, tanto más cuanto que contamos entre nuestros consocios, al Dr. FÜRNKORN, quien, compenetrado del alcance del mismo, está dispuesto a apoyar, con su autorizada opinión, esta demanda, desde el alto cargo que ocupa.

Señores:

Brindo por la prosperidad de la Sociedad Científica Argentina para honra de nuestra patria, y por vuestra ventura personal ».

SECCIÓN OFICIAL
DE LA
SOCIEDAD CIENTÍFICA ARGENTINA
SECCIÓN "SANTA FÉ"

Sesión de comunicaciones del 21 de Junio de 1938

En una de las aulas de la Facultad de Química, y bajo la presidencia del Presidente, Dr. Gustavo A. Fester, se realizó el 21 de Junio, a las 18, una sesión de comunicaciones científicas, considerándose las comunicaciones cuyos resúmenes se publican a continuación:

**DETERMINACIÓN DE LA CAPACIDAD DE ADSORCIÓN Y BASES
INTERCAMBIABLES EN LOS SUELOS**

POR J. GOLLAN (H.) Y O. MALLEA

En esta comunicación los autores proponen un nuevo método para la determinación de los valores de la máxima capacidad de adsorción, del estado de saturación y del estado de insaturación en los suelos.

LÍMITE LÍQUIDO EN SUELO. - COMPARACIÓN

POR VICTOR S. NICOLLIER

En esta comunicación el autor estudia comparativamente los métodos para la determinación de esa constante física utilizada para la clasificación de los suelos de subrasantes o de caminos de tierra.

Describe el método americano a mano, el método con el carrito Gollan y el dispositivo americano del Public Roads, comparando este último dispositivo con el carrito Gollan.

ALGUNAS ROCAS DE TIERRA DEL FUEGO

Por GREGORIO KLEER

En esta comunicación el autor estudia algunas rocas provenientes de Tierra del Fuego y facilitadas por el Dr. Gustavo A. Fester. Dichas rocas han sido recogidas: *a*) en la bahía Garibaldi ⁽¹⁾; *b*) en Navidad ⁽²⁾ y su naturaleza petrográfica es:

a) Es una roca semi compacta de color verde claro y textura pizarrosa bien visible a simple vista.

Una lámina delgada en corte normal a la pizarrosidad, observada en el microscopio polarizante, en luz natural, deja ver laminillas de mica color verdoso amarillento, que generalmente se consideran como una variedad de muscovita alcalina, dispuestas paralelamente y con la dirección general de la esquistosidad de todos los demás componentes de la roca; y además escasos y pequeños gránulos de mineral de hierro opaco, probablemente pirita, algunos de contorno del peritoedro, intercalados en las capas de los demás componentes.

Entre nícoles cruzados se percibe nítidamente la textura pizarrosa pórfido y lepidoblástica de sus componentes minerales. Estos están dispuestos en varias capas en cada una de las cuales predomina un elemento, capas que en su mayor parte están separadas por otras más delgadas de muscovita verde amarillenta.

Así notamos unas diez capas en que hay láminas relativamente grandes de microclina casi sin alterar, algunas resquebrajadas con su textura de enrejado o tablero de ajedrez, intercaladas entre gran cantidad de granos de cuarzo yuxtapuestos como los de una cuarcita con extinción ondulante (dinamometamorfismo), entre los que se encuentran muchas laminillas de biotita y muscovita dispuestas en capitas delgadas desgajadas. Cada capa está separada de la anterior por una de mica; en todas predomina el cuarzo en granos grandes y chicos en contacto completo entre sí, con feldespato microclina principalmente, algunas láminas de plagiolasa, ortosa y micas.

Este predominio de la microclina entre los feldespatos indica que la roca ha estado sometida a procesos cataclásticos predominantes.

Por la abundancia de cuarzo y manera de estar dispuestos sus gra-

(1) Ver G. A. FESTER, *La Cordillera Albear y el valle de Tierra Mayor*, en *Revista Minera*. Año 1934, pág. 49.

(2) Ver G. A. FESTER, *Observaciones en la cordillera fueguina*. (Anales de la Sociedad Científica Argentina. Tomo 119, pág. 180).

nos podría considerarse esta roca como una cuarcita; pero dada la cantidad de microclina que posee además de la muscovita, debemos considerarla como un gneis rico en cuarzo, mineralógicamente ácido, o sea un *Gneis cuarcítico*.

b) Es una roca verdosa con manchas blancas, muy alterada. Al microscopio polarizante en luz natural, es una masa de color verdoso muy resquebrajada y alterada en la que se observa distribuidos algunos cristales de mineral de hierro (¿pirita?). Entre nícoles cruzados, no se observa ningún grano de cuarzo en toda la preparación. Hay grandes láminas de feldespatos totalmente alterados en sericita y caolín. Láminas de mica verde claro, variedad de muscovita, hornblenda, y piroxeno. Todos estos caracteres corresponden a una diorita de textura porfírica, muy alterada, antigua, o sea una *Porfírita*.

LA CORDILLERA DARWIN

POR GUSTAVO A. FESTER

Desde la época de Charles Darwin está en discusión, si la roca metamórfica de la Cordillera Fueguina es de edad mesozóica o paleozóica. Por lo pronto, el material poco metamorfoseado de la Gobernación Nacional: pizarras filíticas, lo consideran hoy día la mayor parte de los autores como jurásico-cretáceo, quedando en duda solamente la edad de la roca del «techo» del batolito de la Cordillera Darwin, en la parte este del Canal de Beagle.

En varias oportunidades fueron visitados algunos puntos de la costa, pero recién mis compañeros de viaje de 1937 escalaron algunas cumbres elevadas, como el Monte Italia (2300 m), trayéndome muestras de rocas de las alturas, que permitieron agregar un cierto complemento a las observaciones de Lovisato, Quensel y Kranck, efectuadas en las zonas bajas.

Además, una visita a la Bahía Júpiter, en el Fjord Negri, me permitió delimitar la zona de las granodioritas, que constituyen casi toda la Península Brecknock, contra la roca metamórfica del techo del batolito granítico. Algunos años antes visité la Bahía Garibaldi, donde estamos en la zona de la roca altamente metamórfica, cerca del contacto con el granito (se observó el gneis, estudiado por el Ing. Kleer, una cuarcita o un granito alterado, más compacto, un esquisto cristalino verde «Grünschiefer»), mientras que el material menos metamorfoseado (la formación Buckland-Yahgen de Kranck) se

nota recién del otro lado del canal, en la Bahía Tres Brazos. Sin embargo, entre toda esta roca « ortometamórfica » de Bahía Garibaldi, se observa también algo de aparentemente « parametamórfica » o sea una filita, pero más metamorfoseada que la de Bahía Tres Brazos y la de la zona de Ushuaia.

Esta observación ya permite interpretarse de tal manera, que la roca de la Cordillera Darwin se distinga solamente por el grado de metamorfismo y no por la edad geológica, de la roca mesozóica del sur y este de la montaña fueguina. Ha sido ya observada por Quensel una transición muy paulatina desde el jurásico normal de Teknika hacia las filitas poco metamorfoseadas y nada impide suponer, que agentes dinámicos más fuertes hayan producido un grado todavía mayor de metamorfosis, sin intervención del factor tiempo.

Esta suposición ha sido confirmada todavía por las muestras traídas del interior de la Cordillera Darwin. Por lo pronto, un esquisto sericítico del glaciar de Yendegaia tiene un parecido sumamente grande con el material observado por Kranck y el autor en las Cordilleras Sorondo y Alvear (zona de Ushuaia) y que resulta un pórfido cuarcífero, de edad probablemente suprajurásica, alterado por el dinamometamorfismo de los sobreescurrimientos. Igualmente importantes parecen las muestras que provienen de las cumbres mismas de la Cordillera Darwin. Fuera de una cuarcita, que constituye en parte la cresta central de la cordillera, parece que el material principal de esta y de la cresta sur es otra vez una filita oscura, fuertemente metamorfoseada, como lo prueba especialmente una muestra tomada de la cumbre del Monte Italia. Creemos entonces muy probable, que la roca de la Cordillera Darwin y la de Ushuaia sean de la misma edad y ambas de la época mesozóica. Este concepto, que en el fondo no es otro que el del gran naturalista inglés, concuerda también con las observaciones de Feruglio en los Lagos Argentinos y Viedma, encontrándose un tránsito muy paulatino desde los sedimentos jurásicos-cretáceos a la roca metamórfica y faltando formaciones de mayor edad que el pórfido cuarcífero suprajurásico.

DOSAJE DEL MANGANESO CON LA FORMALDOXINA

POR JOSE CRUELLAS Y R. VALETTO

Las dificultades que presenta el dosaje del manganeso en forma de MnO_4K , con el fotómetro de Pulfrich para concentraciones inferiores a 0,001 % de Mn, debido a la distinta tonalidad que adquiere, y que origina diferentes valores del coeficiente $K = \frac{\text{Concentración}}{\text{Lectura}}$ se eliminan aplicando este método.

La reacción del manganeso con la formaldoxina (CH_2NOH) presenta la ventaja de ser muy sensible, de producir con el manganeso cualquiera que sea su grado de oxidación, en medio alcalino una coloración anaranjada, por la formación del complejo siguiente: $\text{Mn}(\text{CH}_2\text{NO})_3 \cdot 2\text{H}_2\text{O}$, según Hofman y Ehrhart; que es estable a la temperatura ambiente y en el b.m hirviente durante 15 minutos, y que se presta para la colorimetría; en efecto la coloración desarrollada con el manganeso evoluciona hacia un límite que se alcanza después de 30 minutos.

El Fe que da una reacción análoga en las mismas condiciones puede ser eliminado según Kahane, por medio del $\text{Zn}(\text{OH})_2$; este precipita el Fe trivalente sin tocar el Mn bivalente.

Por adición de 1 cm^3 de una solución de CNNa al 12 % alcalinizada con 5 % de $\text{Na}(\text{OH})$ se inhibe la coloración de la formaldoxina con los cationes Ni y Co a la concentración de 6 gr % y del Cu a la concentración de 2,5 gr %, según M. Saraví.

Reactivo: Formaldoxina. — Se disuelven 2 gr de clorhidrato de hidroxilamina y 1 cm^3 de formol al 40 % en 50 cm^3 de agua destilada.

Hidrato de zinc. — Para prepararlo se trata una solución de 50 gr de sulfato de zinc en un litro de agua con un ligero exceso de amoníaco. El precipitado lavado por decantación con agua destilada es diluido en 500 cm^3 de agua. El $\text{Zn}(\text{OH})_2$ es conservado así bajo forma de una pasta fluida que sirve para la separación del Fe.

El líquido estudiado es llevado cerca de la neutralidad por medio del carbonato de sodio o de amonio. Se coloca en un tubo de centrifuga y se le adiciona una cantidad conveniente (de 3 a 4 cm^3) de

pasta de hidrato de zinc; agitando 1 ó 2 minutos. Se centrifuga y decanta el líquido límpido. Se lava el residuo con unos cm^3 de agua destilada y centrifuga nuevamente (con dos lavajes es suficiente). En estas condiciones el Fe y el Mn se separan cuantitativamente y el dosaje colorimétrico del Mn no es perturbado. Al líquido se lo alcaliniza y luego se agregan 2 gotas de reactivo (formaldoxima) dejando transcurrir unos 30 minutos para la observación y completando previamente a un volumen determinado.

Preparación de la solución tipo de sulfato de manganeso para las determinaciones con el fotómetro de Pulfrich. — Según P. Pascal la pérdida de agua de cristalización del $\text{SO}_4\text{Mn} \cdot 4\text{H}_2\text{O}$ se verifica de la siguiente manera: Por calefacción del $\text{SO}_4\text{Mn} \cdot 4\text{H}_2\text{O}$ a $98^\circ \rightarrow$ da $\text{SO}_4\text{Mn} \cdot 2\text{H}_2\text{O}$.

Por calefacción prolongada del $\text{SO}_4\text{Mn} \cdot 2\text{H}_2\text{O} \rightarrow$ da $\text{SO}_4\text{Hn} \cdot 1\text{H}_2\text{O}$.

Y el $\text{SO}_4\text{Mn} \cdot 1\text{H}_2\text{O}$ recién a $280^\circ - 300^\circ$ pasa a $\rightarrow \text{SO}_4\text{Mn}$.

Para obtener una solución tipo calentamos en estufa a 100° durante 48 horas el $\text{SO}_4\text{Mn} \cdot 4\text{H}_2\text{O}$, y lo consideramos totalmente transformado en $\text{SO}_4\text{Mn} \cdot 1\text{H}_2\text{O}$. Lo que luego se constató por el dosaje del Mn de la misma, en forma de $\text{P}_2\text{O}_7\text{Mn}$ (según Treadwell).

Determinación del coeficiente $K = \frac{\text{Concentración}}{\text{Lectura}}$ con el fotómetro de Pulfrich. — Se efectuaron determinaciones variando las concentraciones de la solución tipo y el color del vidrio interpuesto para espesores de 10 mm de solución.

Las condiciones más favorables para efectuar las lecturas son para concentraciones comprendidas entre 0,000104 y 0,0006 gr de Mn % en el líquido. Para el vidrio N° 2 (azul) el coeficiente resultó igual a 0,0000568 y para el vidrio N° 4 (amarillo) igual a 0,000071.

Influencia del tiempo en el desarrollo de la coloración. — Se hicieron lecturas con el fotómetro a medida que iba transcurriendo el tiempo, observándose que el valor máximo corresponde a los 30 minutos de iniciada la reacción y que se mantiene constante aún al día siguiente.

Influencia de la cantidad de $\text{Zn}(\text{OH})_2$ agregada. — Las determinaciones efectuadas variando la cantidad de hidrato de zinc agregada a una misma cantidad de solución tipo y a un líquido conteniendo 1,57 % de Fe muestran que un agregado de 3 ó 4 cm^3 de pasta

de hidrato de zinc prácticamente no retienen con un solo lavaje; Mn en el residuo de la decantación, y que el líquido límpido no acusa reacción de Fe.

Influencia del número de lavajes.— Los ensayos efectuados con la solución tipo en varias concentraciones y con un agregado de 10 cm³ de hidrato de zinc, pusieron de manifiesto que el tercer lavaje por centrifugación, prácticamente había arrastrado todo el manganeso existente.

Ciclo de conferencias

QUÉ SON Y PARA QUÉ SIRVEN LAS DIATOMEAS

CONFERENCIA DEL DR. JOAQUÍN FRENGUELLI

El 1º de julio tuvo lugar en el salón de la Facultad de Química Industrial y Agrícola de Santa Fe la conferencia organizada por la Sección Santa Fe de la Sociedad Científica Argentina, a cargo del Director del Museo de La Plata, Dr. Joaquín Frenguelli, sobre el tema: « Qué son y para qué sirven las Diatomeas ».

Dicha conferencia fué ilustrada con proyecciones luminosas y se realizó bajo los auspicios del Instituto Social de la Universidad Nacional del Litoral.

Después de exponer brevemente las principales nociones acerca de la morfología, la biología y los criterios taxonómicos en que se funda la clasificación de las Diatomeas, mostrando con dibujos y excelentes microfotografías ejemplares típicos de estos microorganismos, el doctor Frenguelli explicó con las siguientes palabras para qué sirven la Diatomeas:

PARA QUÉ SIRVEN LAS DIATOMEAS

A pesar de que estas Algas microscópicas son poco conocidas hasta para muchos naturalistas, las diatomeas forman una clase de microorganismos de suma importancia por su extraordinaria difusión y por el papel que desempeñan en la economía de la Naturaleza. Al

estado viviente y fósil ellas encuentran, además, una aplicación amplia en la Ciencia, en el Arte, en la Técnica, en la Industria y en la Economía humana.

En la Ciencia, su estudio, bajo el nombre de Diatomología, constituye una rama del humano saber, que es necesario cultivar para el conocimiento integral de la Naturaleza que nos rodea.

Proporciona, además, nociones subsidiarias, pero importantes, para otras ramas de la Ciencia y especialmente para la Geología. La acumulación de los despojos diatómicos en mares y cuencas continentales en varias épocas (particularmente durante el Mioceno y el Pleistoceno) fué tan intensa que llegó a formar depósitos y luego rocas (« tierra de infusorios », trípoli o *Kieselguhr*) de grandiosa extensión vertical y horizontal.

Especialmente conocidos son los de California, de las Antillas, de Nueva Zelandia, España, Grecia, Italia y Africa septentrional, incluso el depósito de la ciudad de Trípoli que, por ser explotado desde la remota antigüedad clásica, dió uno de sus nombres a la roca.

Estos depósitos, formados por cantidades enormes de los pequeños frústulos silíceos, se acumularon de la misma manera como hoy se sedimentan los « limos de Diatomeas » que, según cálculos de Murray y Renard, cubren el fondo de los mares peripolares (especialmente periantárticos) por una extensión de 10 millones de km².

Diseminados en las demás rocas sedimentarias, los diminutos frústulos diatómicos constituyen elementos paleontológicos (microfósiles) importantes para determinaciones estratigráficas y cronológicas, sobre todo ahí donde, como ocurre a menudo, falta el subsidio de los macrofósiles: en estos casos, es difícil que en los sedimentos, convenientemente preparados, el microscopio no descubra algunos (a veces muchos) frústulos capaces de subsanar la falta de otro elemento paleontológico y de orientarnos en la solución de nuestros problemas.

Pero, donde más resulta valioso el subsidio diatomológico es en la investigación genética de los sedimentos y en la reconstrucción del ambiente físico y biológico de su acumulación. Las Diatomeas en efecto, constituyen los reactivos más sensibles a las condiciones y a las modificaciones del medio ambiente; no tanto las especies examinadas separadamente como sus poblaciones, sus conjuntos de formas, constituyendo ordinariamente sinecias numerosas y propias para las diferentes condiciones mesológicas, variables y variantes, en relación con sus exigencias ecológicas, y con las evoluciones del medio en el espacio y en el tiempo. Es así que se constituyen sinecias

entre sí muy diferentes en la costa y en la masa de los Océanos, en la superficie y en el fondo de los mares, en los estuarios, en las lagunas, en los charcos, en los pantanos, en las turberas, en las surgentes y en la rocas húmedas, en las aguas dulces y en las de diferente grado de salobredad, en las aguas frías y en las cálidas, en las llanuras y en las montañas, en las fuentes termales y en las aguas de deshielo de calotas polares y ventisqueros.

En Geología, recientemente, las Diatomeas sirvieron también para ensayar teorías acerca del tan debatido origen del petróleo. Se consideró que la acumulación de las gotitas que existen en el protoplasto diatómico (2 a 10 por cada célula, representando desde 5 hasta el 50 % del contenido citoplástico), pudo haber proporcionado la materia prima para los depósitos petrolíferos de California, asociados a grandes acumulaciones tripoláceas.

Las Diatomeas, al estado viviente, proporcionan elementos subsidiarios valiosos para muchos problemas propios de la oceanografía; particularmente para el estudio del recorrido y del alcance de las corrientes marinas, problema de solución difícil con todos los demás medios hasta ahora ensayados. Su extrema sensibilidad a las diferencias de contenido salino y de la temperatura de las aguas, determina apreciables diversidades de formas en la masa oceánica y en las aguas de las corrientes que forman corredores en el seno de la masa misma. Es así que el predominio de *Campylodiscus striatus* pudo definir el recorrido de la « corriente del Golfo ». De la misma manera, la presencia de *Biddulphia sinensis* en el océano frente a Mar del Plata, me permitió afirmar que la « corriente del Brasil », desde el mar Caribe, frente a la costa de las Guayanas (donde la diatomea mencionada forma un centro endémico bien conocido) en épocas favorables puede alcanzar nuestras costas atlánticas; así como también la presencia de *Corethron criophilum* en la Bahía de San Blas, me reveló con certeza que la « corriente de las Malvinas », desde las aguas frías periantárticas (donde el mencionado *Corethron* vive en ambiente propio y exclusivo) logra alcanzar, acaso en invierno, las costas australes de la provincia de Buenos Aires.

En fin, como elemento subsidiario, los frústulos diatómicos sirven a las ciencias médicas, para provocar sólidos coágulos venosos, como estimulante de la mucosa gastro-intestinal (de la misma manera que el caolín u otros polvos inertes) y para el estudio del origen y de la evolución de algunos tumores malignos: así, por ejemplo, el sarcoma de Rous, cuyos fibroblastos atípicos e invasores pudieron ser reproducidos en los músculos de la gallina, por Poduwissosky en Europa, por Tello, Brachetto - Brian, entre nosotros.

En el Arte, los admirables y variados adornos de las valvas diatómicas pueden proporcionar una fuente inagotable de motivos ornamentales.

En la Técnica fué el frústulo de las diatomeas que determinó el notable perfeccionamiento del microscopio moderno. El afán de los diatomólogos en resolver cada vez más y mejor la finísima estructura de la valva diatómica los obligó a buscar medios ópticos cada vez más poderosos y perfectos. Y especialmente al diatomólogo belga Henry van Heurek debemos los más grandes progresos en este sentido, progresos que no sólo beneficiaron a la Diatomología, sino también a la Medicina y a todas las ramas de la Ciencia que se valen del microscopio para sus investigaciones.

En las diferentes ramas de la Industria, las diatomeas hallan una aplicación amplia, especialmente en su estado fósil, esto es como trípoli: como polvo para limpiar metales, consiguiéndose con el trípoli el mejor lustre que puede conseguirse con frotación;

para fabricar pastas y polvos dentífricos, de acción eficaz, pero poco recomendables porque su uso prolongado desgasta el esmalte dentario;

para fabricar ciertos vidrios, porcelanas y objetos refractarios, muy resistentes al calor, debido a la indestructibilidad de la sílice del frústulo diatómico frente a las más altas temperaturas;

para fabricar ciertos filtros, como los que se usan para sueros, vacunas y toxinas bacterianas, muy eficaces por la extrema finura de la estructura de las valvas diatómicas y por su elevada resistencia a los álcalis y a los ácidos;

para substituir el amianto en el revestimiento de tubos para vapor, en tubos de aparatos de refrigeración, y en todos los casos en que se necesita un material no combustible ni conductor;

en la fabricación de la dinamita (sistema Nobel), en la cual las microscópicas celdillas de los frústulos diatómicos desmenuzan la nitroglicerina en sus poros infinitamente pequeños y, transformándola prácticamente en sólido, la hacen de fácil conservación y resistente, sin explotar, al choque y a las temperaturas ordinarias.

En la Economía humana, puede recordarse que especialmente los depósitos de las diatomeas dieron alimento de los geófagos prehistóricos y lo dan hoy a los geófagos salvajes actuales. Posiblemente la substancia alimenticia de los trípolis está constituida por los restos del endocromo que forma una parte considerable del contenido citoplástico de la célula diatómica, muy resistente al desecamiento y a la descomposición por putrefacción. Pero, en vista del escaso va-

lor alimenticio de los restos endocrómicos, cabe pensar que, más que un alimento, los geófagos buscan en el trípoli un oportuno estimulante de la mucosa gastro-intestinal.

Mucho más importantes, desde el punto de vista económico, son las Diatomeas para la industria de la pesca y la piscicultura. Para comprenderlo, debemos pensar en que las Diatomeas forman el alimento fundamental, directa o indirectamente, de todos los seres acuátiles. En efecto, de ellas se nutren la mayor parte de los organismos fitófagos que, a su vez, alimentan a los carnívoros. Entre los fitófagos de valor económico que se sirven de las diatomeas como alimento exclusivo recordaré, por ejemplo, las ostras, las almejas y los pequeños peces, entre los cuales las sardinas. Recordaré también los copépodos, pequeños crustáceos, de que se alimentan exclusivamente una gran cantidad de especies diferentes de peces y otros seres acuáticos comestibles.

La importancia de las Diatomeas desde este punto de vista es tan grande que bien pudo afirmarse que ellas, en todas las aguas, representan los que las hierbas y los pastos son en la superficie de los continentes.

No será posible fundar sobre bases racionales las leyes que regulan la pesca y no será posible resolver de una forma científica y provechosa los diferentes problemas de la piscicultura, si antes no estudiaremos las Diatomeas que pueblan nuestras aguas, su distribución, sus migraciones, así como también las relaciones que existen entre las diferentes especies de Diatomeas y los diversos seres, especialmente los de valor económico, que se alimentan de ellas.

Es por eso que todas las naciones que traen de la pesca y de la piscicultura la fuente principal de su alimentación y de sus recursos económicos han intensificado el estudio de las Diatomeas y han fundado un sinnúmero de estaciones hidrobiológicas principalmente destinadas al mismo fin.

En efecto, la presencia o la ausencia, permanente o estacional, en determinados mares y en determinadas costas, las migraciones de especies ictiológicas y de enjambres, la posibilidad o imposibilidad de realizar la cría de peces y de moluscos en determinadas lagunas y en determinadas costas marinas, más que de los factores ecológicos ordinariamente apreciados, dependen principalmente de la presencia o la ausencia de Diatomeas, o, mejor, de ciertas Diatomeas, y de sus desplazamientos verticales y horizontales, determinados por las corrientes, por las actividades biológicas de las Diatomeas mismas o por cambios mesológicos (ecológicos y fenológicos). Y, si bien estos

hechos en gran parte están condicionados por situaciones estables o variables del medio ambiente, el estudio de las Diatomeas ofrece el índice más sensible y prácticamente más certero para revelar y apreciar estas condiciones, por su calidad y cantidad, por su extrema sensibilidad a los caracteres del medio físico y a las variaciones de los factores ecológicos, muchos de los cuales escapan a nuestra apreciación, a nuestros análisis realizados con los medios ordinariamente provistos por la física y la química.

Y repetiré con el diatomólogo norteamericano Alberto Mann: « El valor de las diatomeas en este sentido sólo recientemente ha comenzado a apreciarse. Es muy extraño que el estudio de este importante argumento haya sido tan largamente diferido; tan extraño como si los agricultores hubieran persistentemente descuidado el estudio del cultivo de aquellos forrajes de los cuales depende el bienestar de su ganado. El enorme valor, para los habitantes de todos los países, de las pesquerías en el mundo, da la medida de la importancia del estudio de estos diminutos organismos, íntimamente vinculados al problema de la alimentación de los peces. Cuando la flora diatómica de nuestras costas y de nuestros mares abiertos será suficiente conocida, recién entonces estaremos en condiciones de comprender mejor ciertos problemas, como la migración de los peces y la preponderancia de ciertas especies en determinadas aguas; y no es improbable que entonces podrán descubrirse medios adecuados para aumentar el alimento de los peces y mejorarlo, de la misma manera como la agrostología trabaja para el mejoramiento de la industria del ganado ».

SERIES SIMPLES Y DOBLES DE DIRICHLET Y DE FACULTAD ASINTÓTICAS

POR J. C. VIGNAUX

Se debe a H. Poincaré⁽¹⁾ la importante y fecunda teoría de las *series de potencias asintóticas*, la cual permite representar asintóticamente una función $f(z)$ real o compleja, mediante una serie de potencias del tipo

$$\sum_0^{\infty} \frac{a_m}{z^n}$$

convergente o divergente. Esta teoría ha dado lugar a varios trabajos fundamentales y a numerosas aplicaciones en el dominio de la matemática pura y aplicada.

Su extensión a las series dobles de potencias del tipo

$$\sum_0^{\infty} \sum_0^{\infty} \frac{a_{m,n}}{x^m y^n}$$

así como sus aplicaciones a la *transformada doble de Laplace* y a las funciones *cuasianalíticas de dos variables*, cuestiones íntimamente ligadas con la teoría de los *momentos dobles*., nos hemos ocupado ya anteriormente⁽²⁾.

En la presente memoria propongo algunas generalizaciones y extensiones con la introducción de la representación asintótica de las funciones de una y de dos variables, mediante series de Dirichlet y series de facultad.

(1) H. POINCARÉ, *Acta Mat.* t. 8 (1886).

(2) J. C. VIGNAUX, *Series doble asintóticas*, «Anales de la Soc. Cient. Argentina». En esta nota damos la bibliografía sobre las series asintóticas.

El trabajo comprende tres capítulos. En el primero, después de definir la correspondencia asintótica mediante series de Dirichlet del tipo

$$[2] \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s} \quad \text{y} \quad \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{m,n}}{m^s n^w} \quad [3]$$

y de dar la extensión correspondiente del método de Stieljes, se prueban cuáles son las operaciones fundamentales que se pueden efectuar sobre tales desarrollos.

Luego se extienden todos estos resultados a las series dobles del tipo [3].

En el II Capítulo generalizaremos estos resultados a las series simples y dobles de Dirichlet del tipo

$$\sum_0^{\infty} a_n e^{-\lambda n^2}, \quad \sum_0^{\infty} \sum_0^{\infty} a_{m,n} e^{-\lambda m^x - \mu n^y}$$

En el último capítulo, se estudian las series asintóticas de facultad simples y dobles.

$$\sum_0^{\infty} \frac{a_n n!}{z(z+1) \dots (z+n)},$$

$$\sum_0^{\infty} \sum_0^{\infty} \frac{a_{m,n} n! m!}{z(z+1) \dots (z+n) w(w+1) \dots (w+m)}$$

CAPITULO I

I. — SERIES SIMPLES DE DIRICHLET

DEFINICIONES. — Dada la serie

$$\sum_0^{\infty} \frac{a_n}{n^z} \quad [1]$$

de la variable compleja $z = x + iy$, definida en el semiplano $R(z) > 0$, diremos que la $f(z)$ tiene por *desarrollo asintótico* (D) la serie [1] si la expresión

$$\varepsilon_n(z) = n^z \left(f(z) - \sum_{i=1}^n \frac{a_i}{i^z} \right) \rightarrow 0 \quad [2]$$

cuando $z \rightarrow \infty$ y $n = 1, 2, 3, \dots$

De la [2] resulta la igualdad

$$f(z) = \sum_{i=1}^n \frac{a_i}{i^z} + \frac{\varepsilon_n(z)}{n^z} \quad \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_n(z) \rightarrow 0 \\ n = 1, 2, 3, \dots \end{array} \right. \quad [3]$$

y recíprocamente.

Esta correspondencia se indicará con la notación

$$f(z) \sim \sum_0^{\infty} \frac{a_n}{n^z}$$

TEOREMA I. — Si una función admite un desarrollo asintótico (D), este es único.

En efecto; supongamos que

$$f(z) \sim \sum_1^{\infty} \frac{a_n}{n^z}$$

y

$$f(z) \sim \sum_1^{\infty} \frac{b_n}{n^z}$$

se tiene entonces

$$f(z) = \sum_{i=1}^n \frac{a_i}{i^z} + \frac{\varepsilon_n(z)}{n^z} \quad \varepsilon_n(z) \rightarrow 0$$

$$f(z) = \sum_{i=1}^n \frac{b_i}{i^z} + \frac{\delta_n(z)}{n^z} \quad \delta_n(z) \rightarrow 0.$$

De aquí resulta

$$0 = \frac{a_1 - b_1}{1^z} + \frac{a_2 - b_2}{2^z} + \dots + \frac{a_n - b_n}{n^z} + \frac{\varepsilon_n(z) - \delta_n(z)}{n^z},$$

la cual para $z \rightarrow \infty$, nos da

$$a_1 = b_1.$$

Reemplazando este valor en la anterior y multiplicando ambos miembros por 2^z , se tiene

$$0 = a_2 - b_2 + \dots + (a_n - b_n) \left(\frac{2}{n} \right)^z + [\varepsilon(z) - \delta(z)] \left(\frac{2}{n} \right)^z$$

de la cual para $z \rightarrow \infty$ se deduce

$$a_2 = b_2,$$

y continuando de este modo resulta sucesivamente

$$a_3 = b_3 \dots a_n = b_n.$$

DESARROLLO EN SERIE ASINTOTICA (D).— El desarrollo de una función en serie asintótica (D), se puede obtener del siguiente modo:

Sea $f(z)$ una función tal que

$$\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = a_1 \quad (a_1 \text{ finito})$$

y supongamos además

$$\lim 2^z [f(z) - a_1] = a_2 \quad \text{es decir} \quad 2^z \left[f(z) - a_1 - \frac{a_2}{2^z} \right] \rightarrow 0$$

$$\lim 3^z \left[f(z) - a_1 - \frac{a_2}{2^z} \right] = a_3 \quad \gg \quad 3^z \left[f(z) - a_1 - \frac{a_2}{2^z} - \frac{a_3}{3^z} \right] \rightarrow 0$$

y en general

$$\lim n^z \left[f(z) - a_1 - \frac{a_2}{2^z} - \dots - \frac{a_{n-1}}{n^z} \right] = a_n.$$

Este proceso nos conduce al desarrollo asintótico (D)

$$f(z) \sim \sum_0^{\infty} \frac{a_n}{n^z}$$

y constituye, por tanto la extensión del algoritmo de Stieljes.

2. OPERACIONES FUNDAMENTALES. — Una vez definida la correspondencia entre una función y su desarrollo asintótico del tipo anterior, probaremos que dicha correspondencia se conserva en las operaciones fundamentales.

SUMA. — Si las funciones $f(z)$, $g(z)$ tienen por desarrollos asintóticos (D) respectivamente

$$f(z) \sim \sum_1^{\infty} \frac{a_n}{n^z} \quad , \quad g(z) \sim \sum_1^{\infty} \frac{b_n}{n^z}$$

resulta entonces

$$f(z) \pm g(z) \sim \sum_1^{\infty} \frac{a_n \pm b_n}{n^z} .$$

En efecto, por hipótesis es

$$f(z) = \sum_1^n \frac{a_p}{p^z} + \frac{\varepsilon_n(z)}{n^z} \quad \varepsilon_n(z) \rightarrow 0$$

y

$$g(z) = \sum_1^n \frac{b_p}{p^z} + \frac{\delta_n(z)}{n^z} \quad \delta_n(z) \rightarrow 0$$

Por tanto

$$f(z) \pm g(z) = \sum_1^n \frac{a_p \pm b_p}{p^z} + \frac{\eta_n(z)}{n^z}$$

donde

$$\eta_n(z) = \varepsilon_n(z) \pm \delta_n(z) .$$

Puesto que

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \eta_n(z) = 0 \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

la relación anterior prueba el teorema.

PRODUCTO. — Si las funciones $f(z)$ y $g(z)$ tienen por desarrollo asintótico (D) a

$$f(z) \sim \sum_1^{\infty} \frac{a_n}{n^s}, \quad g(z) \sim \sum_1^{\infty} \frac{b_n}{n^s} \quad [1]$$

se tiene entonces

$$f(z) \cdot g(z) \sim \sum_1^{\infty} \frac{c_n}{n^s}$$

donde el segundo miembro es la serie producto (Dirichlet)⁽¹⁾ de las series [1] y [2].

Por hipótesis

$$f(z) = \sum_1^n \frac{a_p}{p^s} + \frac{\varepsilon_n(z)}{n^s} = f_n + \frac{\varepsilon_n(z)}{n^s} \quad \varepsilon_n(z) \rightarrow 0$$

$$g(z) = \sum_1^n \frac{b_p}{p^s} + \frac{\delta_n(z)}{n^s} = g_n + \frac{\delta_n(z)}{n^s} \quad \delta_n(z) \rightarrow 0$$

cuando $z \rightarrow \infty$. De aquí resulta

$$f(z) \cdot g(z) = f_n g_n + f_n \frac{\delta_n}{n^s} + g_n \frac{\varepsilon_n}{n^s} + \frac{\varepsilon_n \cdot \delta_n}{n^{2s}}. \quad [1]$$

(¹) Dadas las dos series $\sum_1^{\infty} u_n$ y $\sum_1^{\infty} v_n$ se llama serie producto en el sentido de Dirichlet, a la serie

$$u_1 v_1 + (u_1 v_2 + u_2 v_1) + (u_1 v_3 + v_3 u_1) + \dots$$

cuyos términos se obtienen asociando los factores $u_r v_s$ de modo que el producto rs de sus índices sea 1, luego en el cual el producto de los mismos sea 2, y así sucesivamente; el término de rango p es, por tanto,

$$c_p = \sum_{rs=p} u_r v_s.$$

Haciendo el producto *formal* de las dos series de Dirichlet

$$\sum_1^{\infty} \frac{u_n}{n^s}, \quad \sum_1^{\infty} \frac{v_n}{n^s}$$

con la regla anterior resulta una serie de Dirichlet del mismo tipo.

Los teoremas de Cauchy, Mertens, Abel, Hardy, relativos a la multiplicación con la *regla de Cauchy*, tienen sus análogos para el producto según la regla anterior.

G. H. HARDY y M. RIEZ, *The General Theory of Dirichlet Series*.

H. HARDY, *On the multip. of Dirichlet series*, Proc. Lind. Math. Soc., 1912.

Además

$$\begin{aligned}
 f_n g_n = & a_1 b_1 + \frac{a_2 b_1}{2^x} + \frac{a_3 b_1}{3^x} + \dots + \frac{a_n b_1}{n^x} \\
 & + \frac{a_1 b_2}{2^x} + \frac{a_2 b_2}{2^x \cdot 2^x} + \dots + \frac{a_n b_2}{n^x \cdot 2^x} \\
 & + \frac{a_1 b_3}{3^x} + \frac{a_2 b_3}{2^x \cdot 3^x} + \dots + \frac{a_n b_3}{n^x \cdot 3^x} \\
 & + \dots \dots \dots + \dots \dots \dots \\
 & + \frac{a_1 b_n}{n^x} + \dots + \frac{a_n b_n}{n^x \cdot n^x},
 \end{aligned}$$

e indicando con

$$\sum_{p=1}^n \frac{c_p}{p^x}$$

la suma de los n primeros términos de la serie producto (D) y con $P(z)$ el polinomio formado con la suma de los restantes términos del cuadro anterior; se tiene

$$f_n \cdot g_n = \sum_{p=1}^n \frac{c_p}{p^x} + P(z).$$

La igualdad [1] resulta

$$n^x \left[f(z) \cdot g(z) - \sum_{p=1}^n \frac{c_p}{p^x} \right] = f_n \delta_n + g_n \epsilon_n + \frac{f_n \cdot g_n}{n^x} + P(z) n^x$$

Puesto que:

$$\lim f(z) = a_1, \quad \lim g(z) = b_1 \quad \text{y} \quad \lim P(z) n^x \rightarrow 0$$

resulta entonces

$$\lim_{z \rightarrow \infty} n^x \left[f(z) g(z) - \sum_{p=1}^n \frac{c_p}{p^x} \right] = 0$$

lo cual prueba el teorema.

DIVISION. — Si

$$f(z) \sim \sum_1^{\infty} \frac{a_n}{n^s}, \quad g(z) \sim \sum_1^{\infty} \frac{b_n}{n^s}, \quad (b_1 \neq 0)$$

son los desarrollos asintóticos (D) respectivamente de $f(z)$ y $g(z)$; se tiene entonces

$$\frac{f(z)}{g(z)} \sim \sum_1^{\infty} \frac{d_n}{n^s}$$

donde los coeficientes d_n se determinan mediante las ecuaciones

$$a_1 = b_1 d_1$$

$$a_2 = b_1 d_2 + b_2 d_1$$

$$a_3 = b_1 d_3 + b_3 d_1$$

$$a_4 = b_1 d_4 + b_2 d_2 + b_4 d_1$$

$$\dots \dots \dots$$

Por hipótesis

$$f(z) = \sum_{p=1}^n \frac{a_p}{p^s} + \frac{\varepsilon_n(z)}{n^s} = f_n + \frac{\varepsilon_n}{n^s}, \quad \varepsilon_n(z) \rightarrow 0$$

$$g(z) = \sum_{p=1}^n \frac{b_p}{p^s} + \frac{\delta_n(z)}{n^s} = g_n + \frac{\delta_n}{n^s}, \quad \delta_n(z) \rightarrow 0.$$

De aquí se deduce

$$\frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f_n}{g_n} + \eta_n(z), \quad \eta_n(z) = \frac{\frac{\varepsilon_n}{n^s} - \frac{f_n}{g_n} \frac{\delta_n}{n^s}}{g_n + \frac{\delta_n}{n^s}} \quad [1]$$

y puesto que

$$f_n \rightarrow a_1, \quad g_n \rightarrow b_1 \neq 0, \quad z \rightarrow \infty$$

resulta

$$\eta_n(z) \rightarrow 0.$$

Por tanto, se tiene

$$\frac{f_n}{g_n} = \sum_{p=1}^n \frac{d_p}{p^s} + \frac{Q(z)}{g_n}$$

donde $Q(z)$ designa el polinomio formado con la suma de los restantes términos de este cuadro; y la relación [1] resulta

$$n^s \left(\frac{f(z)}{g(z)} - \sum_{p=1}^n \frac{d_p}{p^s} \right) = n^s \left(\frac{Q(z)}{g_n} + \eta_n(z) \right).$$

De aquí, teniendo presente que

$$\frac{n^s \cdot Q(z)}{g_n} \rightarrow 0, \quad n^s \cdot \eta_n(z) \rightarrow 0, \quad z \rightarrow \infty$$

se tiene

$$\lim_{z \rightarrow \infty} n^s \left[\frac{f(z)}{g(z)} - \sum_{p=1}^n \frac{d_p}{p^s} \right] = 0$$

lo cual prueba el teorema.

INTEGRACIÓN. — Si

$$f(z) \sim \sum_2^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$$

resulta entonces

$$\int_z^{\infty} f(z) dz \sim \sum_2^{\infty} a_n \int_z^{\infty} \frac{dz}{n^s} = \sum_2^{\infty} \frac{a_n}{\lg n} \frac{1}{n^s}$$

la integral esta tomada sobre un semi-rayo de origen z situado en la región $R(z) > 0$.

En efecto; por hipótesis

$$f(z) = \sum_{p=2}^n \frac{a_p}{p^s} + \frac{\varepsilon_n(z)}{n^s}, \quad \varepsilon(z) \rightarrow 0$$

de donde

$$\int_z^{\infty} f(z) dz = \sum_{p=2}^n a_p \int_z^{\infty} p^{-s} dz + \int_z^{\infty} \varepsilon_n(z) \cdot n^{-s} dz$$

luego

$$\int_z^{\infty} f(z) dz = \sum_{p=2}^n \frac{a_p}{\lg p} \cdot \frac{1}{p^s} + \frac{\eta_n(z)}{n^s} \quad [1]$$

donde

$$\eta_n(z) = n^s \int_z^{\infty} \varepsilon_n(z) n^{-s} dz.$$

De la condición $\varepsilon_n(z) \rightarrow 0$, resulta que fijando un $\delta > 0$ arbitrario existe un $z(\delta)$, tal que

$$|\varepsilon_n(z)| < \delta \quad \text{para} \quad |z| > |z(\delta)|.$$

Entonces

$$|\eta_n(z)| < |n^z| \delta \int_z^\infty |n^{-z}| dz$$

Además

$$\int_z^\alpha \frac{|dz|}{|n^z|} = \left[-\frac{1}{\lg n} \frac{1}{|n^z|} \right]_z^\alpha = \frac{1}{\lg n \cdot |n^z|} - \frac{1}{\lg n \cdot n^\alpha}$$

es decir

$$\int_z^\infty \frac{|dz|}{|n^z|} = \frac{1}{\lg n} \cdot \frac{1}{|n^z|}$$

luego

$$|\eta_n(z)| < \frac{\delta}{\lg n}, \quad \text{es decir} \quad \lim_{z \rightarrow \infty} \eta_n(z) = 0;$$

por tanto, teniendo presente la [1], el teorema queda demostrado.

DERIVACIÓN. — Si la función $f(z)$ y su derivada $f'(z)$ tienen respectivamente por desarrollo asintótico (D) a

$$f(z) \sim \sum_2^\infty \frac{a_n}{n^z} \quad [1]$$

y

$$f'(z) \sim \sum_2^\infty \frac{b_n}{n^z} \quad [2]$$

entonces la serie [2] es la serie derivada de la [1].

En efecto; aplicando el teorema de la integración a la serie [2], resulta

$$-f(z) \sim \sum_2^\infty \frac{b_n}{\lg n} \cdot \frac{1}{n^z}; \quad [3]$$

y por el teorema I y la condición [1] se tiene

$$a_n = -\frac{b_n}{\lg n} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

de donde

$$b_n = -a_n \lg n \quad [4]$$

La serie derivada de la [1] tiene la forma

$$- \sum_2^{\infty} a_n \lg n \cdot \frac{1}{n^z},$$

por tanto, según [4], la serie [2] es la serie derivada de la [1].

Es necesario postular que, tanto la función $f(z)$ como su derivada $f'(z)$ tienen cada una una representación asintótica determinada; pues de lo contrario el teorema no es cierto.

Así, la función

$$f(x) = e^{-x} \cdot \operatorname{sen}(e^x)$$

x real y positiva tiene por desarrollo asintótico (D)

$$f(x) = e^{-x} \operatorname{sen}(e^x) \sim 0 + \frac{0}{2^x} + \frac{0}{3^x} + \dots$$

mientras que su derivada

$$f'(x) = e^{-x} \cdot \operatorname{sen}(e^x) + \cos e^x$$

no tiene por desarrollo asintótico la derivada del desarrollo de $f(x)$, desde que el límite $f'(x)$ no existe.

II. — SERIES DOBLES DE DIRICHLET

3.—Las series dobles de Dirichlet han sido ampliamente estudiadas desde el punto de vista de la convergencia por Kojima ⁽¹⁾, Leja ⁽²⁾ Adams ⁽³⁾ y Biggieri ⁽⁴⁾.

Los resultados expuestos para el caso de las series simples se pueden extender a las series dobles en la siguiente forma.

⁽¹⁾ *On the double Dirichlet series*, Sc. Rep. of the Tohoku Imp. Univ., IX, (1915).

⁽²⁾ F. LEJA, *Sur les séries de Dirichlet doubles*. Comptes Rendus du I Congrès des Math. des Pays Slaves, 1929.

⁽³⁾ C. R. ADAMS, *Note on multiple Dirichlet and multiple factorial series*. Ann. of Math., 33 (1932).

⁽⁴⁾ C. BIGGIERI, *Tesis doctoral*, Facultad de Ciencias Exactas etc. de Buenos Aires, 1935.

Diremos que la serie doble de Dirichlet del tipo

$$\sum_1^{\infty} \sum_1^{\infty} \frac{a_{m,n}}{m^x n^y}, \quad [1]$$

de dos variables complejas x e y , representa asintóticamente (D) a la función $f(x, y)$ en la región $\{R(x) > 0, R(y) > 0\}$ e indicaremos con la notación

$$f(x, y) \sim \sum_1^{\infty} \sum_1^{\infty} \frac{a_{m,n}}{m^x n^y},$$

si

$$\varepsilon_{m,n}(x, y) = m^x \cdot n^y \left[f(x, y) - \sum_{p=1}^m \sum_{q=1}^n \frac{a_{pq}}{p^x q^y} \right]$$

tiende a cero, cuando $(x, y) \rightarrow \infty$, $(m, n = 1, 2 \dots)$.

Esto equivale a poner

$$f(x, y) = \sum_{p=1}^m \sum_{q=1}^n \frac{a_{pq}}{p^x q^y} + \frac{\varepsilon_{m,n}}{m^x n^y}$$

con

$$\varepsilon_{m,n}(x, y) \rightarrow 0 \quad (x, y) \rightarrow \infty.$$

Si la función $f(x, y)$ tiene un desarrollo asintótico (D), éste es único, en efecto; supongamos que se tenga a la vez

$$f(x, y) \sim \sum_1^{\infty} \sum_1^{\infty} \frac{a_{m,n}}{m^x n^y}$$

$$f(x, y) \sim \sum_1^{\infty} \sum_1^{\infty} \frac{b_{m,n}}{m^x n^y},$$

es decir

$$f(x, y) = \sum_{p=1}^m \sum_{q=1}^n \frac{a_{pq}}{p^x q^y} + \frac{\varepsilon_{m,n}}{m^x n^y}, \quad \varepsilon_{m,n} \rightarrow 0$$

$$f(x, y) = \sum_{p=1}^m \sum_{q=1}^n \frac{b_{pq}}{p^x q^y} + \frac{\delta_{m,n}}{m^x n^y}, \quad \delta_{m,n} \rightarrow 0$$

Por hipótesis

$$f(x, y) = \sum_1^m \sum_1^n \frac{a_{p,q}}{p^x q^y} + \frac{\varepsilon_{m,n}}{m^x n^y} = f_{m,n} + \frac{\varepsilon_{m,n}}{m^x n^y}$$

$$g(x, y) = \sum_1^m \sum_1^n \frac{b_{p,q}}{p^x q^y} + \frac{\delta_{m,n}}{m^x n^y} = g_{m,n} + \frac{\delta_{m,n}}{m^x n^y}$$

donde

$$\varepsilon_{m,n} \longrightarrow 0, \quad \delta_{m,n} \longrightarrow 0 \quad (x, y) \longrightarrow \infty.$$

De aquí

$$f(x, y) \cdot g(x, y) = f_{m,n} \cdot g_{m,n} + f_{m,n} \frac{\delta_{m,n}}{m^x n^y} + g_{m,n} \frac{\varepsilon_{m,n}}{m^x n^y} + \frac{\varepsilon_{m,n} \cdot \delta_{m,n}}{m^{2x} \cdot n^{2y}}.$$

Además

$$f_{m,n} \cdot g_{m,n} = \sum_{p=1}^m \sum_{q=1}^n \frac{c_{p,q}}{p^x q^y} + P(x, y)$$

donde

$$\sum_1^m \sum_1^n \frac{c_{p,q}}{p^x q^y}$$

indica la suma de los $m \cdot n$ primeros términos de la serie producto (Dirichlet) y $P(x, y)$ el polinomio formado con los términos restantes del rectángulo anterior; por tanto resulta

$$\begin{aligned} m^x n^y \left[f(x, y) \cdot g(x, y) - \sum_{p=1}^m \sum_{q=1}^n \frac{c_{p,q}}{p^x q^y} \right] = \\ = f_{m,n} \delta_{m,n} + g_{m,n} \varepsilon_{m,n} + \frac{f_{m,n} g_{m,n}}{m^x n^y} + P(x, y) \cdot m^x n^y \end{aligned}$$

Dirichlet del mismo tipo desde que según la regla de multiplicación anterior, se tiene

$$\begin{aligned} c_{m,n} &= \sum_{p=1}^m \sum_{q=1}^n a_{p,q} b_{\frac{m}{p}, \frac{n}{q}} \frac{1}{p^x q^y} \cdot \frac{1}{\left(\frac{m}{p}\right)^x \left(\frac{n}{q}\right)^y} \\ &= \sum_{p=1}^m \sum_{q=1}^n a_{p,q} b_{\frac{m}{p}, \frac{n}{q}} \frac{1}{m^x n^y}. \end{aligned}$$

Puesto que

$$\lim f(x, y) = a_{11} \quad , \quad \lim g(x, y) = b_{11} \quad , \quad \lim P(x, y) m^x n^y \rightarrow 0 \quad ,$$

resulta finalmente

$$m^x n^y \left[f(x, y) \cdot g(x, y) - \sum_{p=1}^m \sum_{q=1}^n \frac{c_{pq}}{p^x q^y} \right] \rightarrow 0$$

para $(x, y) \rightarrow \infty$.

III. Si $f(x, y)$, $g(x, y)$ admiten los desarrollos asintóticos [1] y [2] y es $b_{11} \neq 0$ se tiene entonces

$$\frac{f(x, y)}{g(x, y)} \sim \sum_1^\infty \sum_1^\infty \frac{d_{m,n}}{m^x n^y}$$

donde los coeficientes se determinan por la relación

$$a_{pq} = \sum_{rs=p} \sum_{ij=q} d_{sij} b_{r,i}.$$

Conservando la notación del teorema anterior, se puede escribir

$$\frac{f(x, y)}{g(x, y)} = \frac{f_{m,n}}{g_{m,n}} + r_i$$

donde

$$r_i = \frac{\frac{e_{m,n}}{m^x n^y} - \frac{f_{m,n}}{g_{m,n}} \frac{z_{m,n}}{m^x n^y}}{g_{m,n} + \frac{z_{m,n}}{m^x n^y}}$$

Teniendo en cuenta que

$$f_{m,n} \rightarrow a_{11} \quad , \quad g_{m,n} \rightarrow b_{11} \neq 0 \quad (z, y) \rightarrow \infty$$

resulta

$$r_i(x, y) \rightarrow 0.$$

Además se tiene

$$\frac{f_{m,n}}{g_{m,n}} = \sum_{p=1}^m \sum_{q=1}^n \frac{d_{p,q}}{p^x q^y} + \frac{Q(x, y)}{g_{m,n}}$$

donde los coeficientes d_{ij} del cociente se determinan por las relaciones

$$a_{12} = b_{11} d_{11} \quad , \quad a_{12} = b_{11} d_{12} + b_{12} d_{11} \dots$$

y $Q(x, y)$ el polinomio formado con los términos restantes del rectángulo anterior.

Por tanto

$$m^x n^y \left[\frac{f(x, y)}{g(x, y)} - \sum_{p=1}^m \sum_{q=1}^n \frac{d_{pq}}{p^x q^y} \right] = m^x n^y \left[\frac{Q(x, y)}{g_{m,n}} + \eta(x, y) \right]$$

y teniendo presente que

$$\frac{m^x n^y Q(x, y)}{g_{m,n}} \rightarrow 0 \quad , \quad m^x n^y \eta(x, y) \rightarrow 0$$

resulta entonces

$$\lim_{(x,y) \rightarrow \infty} m^x n^y \left[\frac{f(x, y)}{g(x, y)} - \sum_{p=1}^m \sum_{q=1}^n \frac{d_{pq}}{p^x q^y} \right] = 0$$

lo cual prueba el teorema.

IV. — Si

$$f(x, y) \sim \sum_2^\infty \sum_2^\infty \frac{a_{m,n}}{m^x n^y}$$

resulta entonces

$$\int_x^\infty \int_y^\infty f(x, y) dx dy \sim \sum_2^\infty \sum_2^\infty \frac{a_{m,n}}{\lg m \cdot \lg n} \frac{1}{m^x n^y}$$

Por hipótesis

$$f(x, y) = \sum_{p=2}^m \sum_{q=2}^n \frac{a_{pq}}{p^x q^y} + \frac{\varepsilon_{m,n}}{m^x n^y} \quad , \quad \varepsilon_{m,n} \rightarrow 0$$

y considerando en los semiplanos $R(x) > 0$, $R(y) > 0$, dos semirayos que parten de los puntos x e y respectivamente, se tiene

$$\begin{aligned} \int_x^\infty \int_y^\infty f(x, y) dx dy &= \sum_{p=1}^m \sum_{q=1}^n a_{pq} \int_x^\infty \int_y^\infty p^{-x} q^{-y} dx dy + \\ &+ \int_x^\infty \int_y^\infty \frac{\varepsilon_{m,n}(x, y)}{m^x n^y} dx dy \end{aligned}$$

luego

$$\int_x^\infty \int_y^\infty f(x, y) dx dy = \sum_{p=1}^m \sum_{q=1}^n \frac{a_{pq}}{lg p \cdot lg q} \frac{1}{p^x q^y} + \frac{\eta_{m,n}}{m^x n^y}$$

donde

$$\eta_{m,n} = m^x n^y \int_x^\infty \int_y^\infty \varepsilon_{m,n} \cdot m^{-x} n^{-y} dx dy$$

De la condición $\varepsilon_{m,n}(x, y) \rightarrow 0$, a todo $\delta > 0$ corresponde un X y un Y tal que

$$|\varepsilon_{m,n}(x, y)| < \delta$$

para

$$\{ |x| > |X|, \quad |y| > |Y| \};$$

luego

$$|\eta_{m,n}| < \frac{\delta}{lg m \cdot lg n}$$

es decir

$$\lim_{x, y \rightarrow \infty} \eta_{m,n} = 0,$$

lo cual prueba el teorema.

V. Si

$$f(x, y) \sim \sum_1^\infty \sum_1^\infty \frac{a_{m,n}}{m^x n^y} \quad [1]$$

$$f_x'(x, y) \sim \sum_1^\infty \sum_1^\infty \frac{b_{m,n}}{m^x n^y} \quad [2]$$

$$f_y'(x, y) \sim \sum_1^\infty \sum_1^\infty \frac{c_{m,n}}{m^x n^y} \quad [3]$$

entonces las series [2] y [3] se obtienen derivando término a término la serie [1].

Se prueba inmediatamente aplicando el teorema de la integración a las series [2] y [3] respectivamente, teniendo presente además el teorema I.

CAPITULO II

I. — SERIES ASINTOTICAS DEL TIPO (λ_n)

5. DEFINICIONES. — Dada la serie de Dirichlet de la variable compleja z en el dominio $R(z) > 0$,

$$\sum_0^{\infty} a_n e^{-\lambda_n z} \quad (\lambda_0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots; \lambda_0 \geq 0) \quad [1]$$

diremos que la [1] es el *desarrollo asintótico* (D, λ_n) , de la función $f(z)$, si la expresión

$$\varepsilon_n(z) = e^{\lambda_n z} (f(z) - a_0 - a_1 e^{-\lambda_1 z} + \dots - a_n e^{-\lambda_n z}) \rightarrow 0 \quad [2]$$

para $|z| \rightarrow \infty$.

De la [2] resulta que

$$f(z) = a_0 + a_1 e^{-\lambda_1 z} + \dots + a_n e^{-\lambda_n z} + \varepsilon_n(z) e^{-\lambda_n z}$$

con

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \varepsilon_n(z) = 0, \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

La correspondencia entre una función dada $f(z)$ y su desarrollo asintótico (D, λ_n) expresaremos del siguiente modo:

$$f(z) \sim a_0 + a_1 e^{-\lambda_1 z} + \dots + a_n e^{-\lambda_n z} + \dots$$

El desarrollo asintótico de Poincaré, corresponde al caso particular: $\lambda_n = n$, pues con la sustitución: $e^z = t$, resulta

$$f(z) = F(t) \sim a_0 + \frac{a_1}{t} + \frac{a_2}{t^2} + \dots + \frac{a_n}{t^n} + \dots$$

El desarrollo (D) que hemos definido en el capítulo anterior corresponde al caso: $\lambda_n = \lg n$

Si una función $f(z)$ tiene un desarrollo asintótico (D, λ_n) , éste es único, en virtud del siguiente

TEOREMA — I. Si es

$$f(z) \sim \sum_0^{\infty} a_n e^{-\lambda_n z}$$

y

$$f(z) \sim \sum_0^{\infty} a_n e^{-\lambda_n z}$$

resulta entonces:

$$a_n = b_n \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

Por hipótesis

$$f(z) = a_0 + a_1 e^{-\lambda_1 z} + \dots + a_n e^{-\lambda_n z} + \varepsilon_n(x) e^{-\lambda_n z}$$

y

$$f(z) = b_0 + b_1 e^{-\lambda_1 z} + \dots + b_n e^{-\lambda_n z} + \delta_n(x) e^{-\lambda_n z}$$

$$\lim \varepsilon_n(z) = \lim \delta_n(z) = 0.$$

De aquí, resulta

$$0 = (a_0 - b_0) + (a_1 - b_1) e^{-\lambda_1 z} + \dots + (a_n - b_n) e^{-\lambda_n z} + (\varepsilon_n - \delta_n) e^{-\lambda_n z}$$

Si, en esta relación hacemos $x \rightarrow \infty$, se tiene

$$a_0 = b_0.$$

Reemplacemos este valor en la anterior y multiplicando ambos miembros por $e^{+\lambda_1 z}$, se tiene

$$0 = (a_1 - b_1) + \dots + (a_n - b_n) e^{-(\lambda_n - \lambda_1)z} + (\varepsilon_n - \delta_n) e^{-(\lambda_n - \lambda_1)z}$$

que para $x \rightarrow \infty$, nos da

$$a_1 = b_1,$$

y así sucesivamente.

Este desarrollo es por tanto *único*. La recíproca no es cierta necesariamente.

El desarrollo de una función en serie asintótica (D, λ_n) , se puede obtener del siguiente modo:

Sea $f(x)$ una función tal que

$$\lim f(z) = a_0, \quad (a_0 \text{ finito})$$

este número da una aproximación de $f(x)$ para valores muy grandes de z .

Supongamos además que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^{\lambda_1 z} [f(x) - a_0] = a_1 \text{ es decir } e^{\lambda_1 z} \left[f(x) - a_0 - \frac{a_1}{e^{\lambda_1 z}} \right] \rightarrow 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^{\lambda_2 z} [f(z) - a_0 - a_1 e^{-\lambda_1 z}] = a_2$$

esto es

$$e^{\lambda_2 z} [f(z) - a_0 - a_1 e^{-\lambda_1 z} - a_2 e^{-\lambda_2 z}] \rightarrow 0$$

.....

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^{\lambda_n z} [f(z) - a_0 - a_1 e^{-\lambda_1 z} - \dots - a_{n-1} e^{-\lambda_{n-1} z}] = a_n.$$

Este proceso nos conduce al desarrollo asintótico (D, λ_n) de la $f(z)$ es decir

$$f(z) = a_0 + a_1 e^{-\lambda_1 z} + \dots + a_n e^{-\lambda_n z} + \varepsilon_n(z) e^{-\lambda_n z}$$

$$\varepsilon_n(x) \rightarrow 0 \quad z \rightarrow \infty.$$

6. OPERACIONES FUNDAMENTALES. — Una vez definida la correspondencia entre una función y su desarrollo asintótico de tipo dado, probaremos que esta correspondencia se conserva en las operaciones fundamentales.

SUMA Y PRODUCTO. — Si las funciones $f(x)$ y $g(x)$ tienen desarrollo asintótico del mismo tipo (λ_n) ,

$$f(z) \sim \sum_0^{\infty} a_n e^{-\lambda_n z}$$

$$g(z) \sim \sum_0^{\infty} b_n e^{-\lambda_n z}$$

se tiene entonces

$$f(z) \pm g(z) \sim \sum_0^{\infty} (a_n \pm b_n) e^{-\lambda_n z}$$

En efecto; por hipótesis es

$$f(z) = \sum_{i=0}^n a_i e^{-\lambda_i z} + \varepsilon_n(z) e^{-\lambda_n z} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \varepsilon_n(z) = 0$$

$$g(z) = \sum_{i=0}^n b_i e^{-\lambda_i z} + \delta_n(z) e^{-\lambda_n z} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \delta_n(z) = 0$$

Por tanto

$$g(z) \pm f(z) = \sum_{i=0}^n (a_i \pm b_i) e^{-\lambda_i z} + \eta_n(x) e^{-\lambda_n z}$$

donde

$$\eta_n(z) = \varepsilon_n(z) + \delta_n(z),$$

Puesto que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \eta_n(z) \rightarrow 0 \quad (n = 1, 2, \dots)$$

el teorema queda demostrado.

Si las funciones $f(z)$ y $g(z)$ tienen (1) y (2) por desarrollo asintóticas (D, λ_n) donde $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n < \dots$; $\lambda_{n+1} < n \lambda_n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) se tiene entonces

$$f(z) \cdot g(z) \sim \sum_1^{\infty} c_n e^{-\lambda_n z}$$

donde el segundo miembro es la serie producto (D, λ_n) de las series (1) y (2). Se prueba como en el caso: $\lambda_n = \log n$.

INTEGRACION. — Si la función $f(z)$ tiene por desarrollo asintótico (D, λ_n)

$$f(x) \sim \sum_0^{\infty} a_n e^{-\lambda_n x}$$

entonces se puede integrar término a término, es decir

$$\int_x^{\infty} f(z) dz \sim \sum_0^{\infty} \frac{a_n}{\lambda_n} e^{-\lambda_n x},$$

siempre que $\lambda_n \neq 0$ ($n = 0, 1, 2, \dots$).

Por hipótesis, se tiene

$$f(z) = \sum_{i=0}^n a_i e^{-\lambda_i z} + \varepsilon_n(x) \cdot e^{-\lambda_n z} \quad \text{con} \quad \varepsilon_n(z) \rightarrow 0$$

de donde

$$\int_z^{\infty} f(z) dz = \sum_{i=0}^n a_i \int_z^{\infty} e^{-\lambda_i z} dz + \int_z^{\infty} \varepsilon_n(z) e^{-\lambda_n z} dz$$

luego

$$\int_z^{\infty} f(z) dz = \sum_{i=0}^n \frac{a_i}{\lambda_i} e^{-\lambda_i z} + \eta_n e^{-\lambda_n z}$$

habiendo puesto

$$\eta_n(z) = e^{\lambda_n z} \int_z^{\infty} \varepsilon_n(z) e^{-\lambda_n z} dz.$$

De la condición $\varepsilon_n(z) \rightarrow 0$, resulta que fijado un $\delta > 0$ arbitrario, existe un $z(\delta)$, tal que

$$|\varepsilon(z)| < \delta \quad \text{para } z > z(\delta).$$

Entonces

$$\begin{aligned} |\eta(z)| &\leq |e^{+\lambda_n z}| \cdot \delta \cdot \int_x^\infty |e^{-\lambda_n z}| dz \\ &= e^{+\lambda_n x} \delta \frac{1}{\lambda_n} e^{-\lambda_n x} = \frac{\delta}{\lambda_n} \end{aligned}$$

luego

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \eta_n(z) = 0,$$

y teniendo en cuenta la igualdad [1] el teorema queda demostrado.

DERIVACIÓN. — Si la función $f(z)$ y su derivada tienen por desarrollo asintótico (D, λ_n) , respectivamente

$$f(z) \sim \sum_0^\infty a_n e^{-\lambda_n z} \quad [1]$$

y

$$f'(z) \sim \sum_0^\infty b_n e^{-\lambda_n z} \quad [2]$$

entonces la serie [2] es la serie derivada de la serie [1].

En efecto; aplicando el teorema de la integración de la serie [2] resulta

$$-f(z) \sim \sum_0^\infty \frac{b_n}{\lambda_n} e^{-\lambda_n z} \quad [3]$$

y según el teorema I, deberá ser

$$-a_n = \frac{b_n}{\lambda_n} \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad [4]$$

Por otra parte, la serie derivada de la [1] es

$$-\sum_0^\infty a_n \lambda_n e^{-\lambda_n z}$$

por tanto, según [4], la serie [2] es la derivada de la serie [1].

II.—SERIES DOBLES ASINTOTICAS DEL TIPO (λ_m, μ_n) .

7. Los resultados anteriores se pueden extender a las series dobles, de la siguiente manera:

Diremos que la serie doble de Dirichlet, convergente o divergente

$$\sum_0^{\infty} \sum_0^{\infty} a_{m,n} e^{-\lambda_m x - \mu_n y} \quad \left\{ \begin{array}{l} \lambda_i < \lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \dots ; \lambda_0 \geq 0 \\ \mu_i < \mu_1 < \mu_2 < \mu_3 < \dots ; \mu_0 \geq 0 \end{array} \right. \quad [1]$$

representa *asintóticamente* (D, γ_m, μ_n) a la función $f(x, y)$ de dos variables complejas x e y en el dominio: $R(x) > 0$, $R(y) > 0$, e indicaremos con la notación

$$f(x, y) \sim \sum_0^{\infty} \sum_0^{\infty} a_{m,n} e^{-\lambda_m x - \mu_n y},$$

si la expresión

$$\varepsilon_{m,n}(x, y) = e^{\lambda_m x + \mu_n y} \left[f(x, y) - \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n a_{i,j} e^{-\lambda_i x - \mu_j y} \right] \quad [2]$$

tiende a cero, cuando $(x, y) \rightarrow +\infty$, $(m, n = 1, 2, 3, \dots)$

La relación [2] se puede escribir

$$f(x, y) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n a_{i,j} e^{-\lambda_i x - \mu_j y} + \varepsilon_{m,n} e^{-\lambda_m x - \mu_n y} \quad [3]$$

con

$$\varepsilon_{m,n}(x, y) \rightarrow 0 \quad (x, y) \rightarrow \infty.$$

El desarrollo asintótico doble de potencia corresponde al caso particular

$$\lambda_m = m, \quad \mu_n = n$$

y

$$e^x = t, \quad e^y = z$$

con lo cual la [1] se transforma en la serie doble de potencia

$$\sum_0^{\infty} \sum_0^{\infty} \frac{a_{m,n}}{t^m z^n}$$

de las variables

$$\frac{1}{t} \text{ y } \frac{1}{z}.$$

I. — Si es

$$f(x, y) \sim \sum_0^{\infty} \sum_0^{\infty} a_{m,n} e^{-\lambda m x - \mu n y}$$

$$g(x, y) \sim \sum_0^{\infty} \sum_0^{\infty} b_{m,n} e^{-\lambda m x - \mu n y}$$

se tiene entonces

$$f(x, y) \pm g(x, y) \sim \sum_0^{\infty} \sum_0^{\infty} (a_{m,n} \pm b_{m,n}) e^{-\lambda m x - \mu n y}.$$

En efecto:

$$f(x, y) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n a_{ij} e^{-\lambda i x - \mu j y} + \varepsilon_{m,n} e^{-\lambda m x - \mu n y}$$

$$g(x, y) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n b_{ij} e^{-\lambda i x - \mu j y} + \delta_{m,n} e^{-\lambda m x - \mu n y}$$

de donde

$$f(x, y) \pm g(x, y) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n (a_{ij} \pm b_{ij}) e^{-\lambda i x - \mu j y} + \eta_{m,n} e^{-\lambda m x - \mu n y}.$$

Puesto que

$$\eta_{m,n} = \varepsilon_{m,n} \pm \delta_{m,n} \longrightarrow 0 \quad (x, y) \longrightarrow \infty$$

la relación anterior prueba el teorema.

II. — Si

$$f(x, y) \sim \sum_1^{\infty} \sum_1^{\infty} a_{m,n} e^{-\lambda m x - \mu n y} \quad \begin{cases} \lambda_m \neq 0 & m = 1, 2, \dots \\ \mu_n \neq 0 & n = 1, 2, \dots \end{cases}$$

resulta entonces

$$\int_x^{\infty} \int_y^{\infty} f(x, y) dx dy \sim \sum_1^{\infty} \sum_1^{\infty} \frac{a_{m,n}}{\lambda_m \mu_n} e^{-\lambda m x - \mu n y}$$

Por hipótesis, se tiene

$$f(x, y) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} e^{-\lambda i x - \mu j y} + \varepsilon_{m,n}(x, y) e^{-\lambda m x - \mu n y}; \quad \varepsilon_{m,n}(x, y) \longrightarrow 0$$

de donde

$$\int_x^\infty \int_y^\infty f(x, y) dx dy = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} \int_x^\infty \int_y^\infty e^{-\lambda_i x - \mu_j y} dx dy + \\ + \int_x^\infty \int_y^\infty \varepsilon_{m,n}(x, y) e^{-\lambda_m x - \mu_n y} dx dy,$$

luego

$$\int_x^\infty \int_y^\infty f(x, y) dx dy = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \frac{a_{ij}}{\lambda_i \mu_j} e^{-\lambda_i x - \mu_j y} + \eta_{m,n} e^{\lambda_m x + \mu_n y}$$

donde

$$\eta_{m,n}(x, y) = e^{-\lambda_m x - \mu_n y} \int_x^\infty \int_y^\infty \varepsilon_{m,n}(x, y) e^{\lambda_m x + \mu_n y} dx dy.$$

De la condición

$$\varepsilon_{m,n}(x, y) \rightarrow 0 \quad (x, y) \rightarrow \infty$$

resulta que, fijando un δ arbitrario, existe un $x(\delta)$ y un $y(\delta)$, tal que

$$|\varepsilon(x, y)| < \delta \quad \text{para} \quad \begin{cases} x > x(\delta) \\ y > y(\delta) \end{cases}.$$

Entonces

$$|\eta_{m,n}(x, y)| \leq e^{-\lambda_m x - \mu_n y} \delta \int_x^\infty \int_y^\infty e^{-\lambda_m x - \mu_n y} dx dy$$

es decir

$$|\eta_{m,n}(x, y)| < \frac{\delta}{\lambda_m \cdot \mu_n} e^{-2\lambda_m x - 2\mu_n y}$$

luego

$$\lim_{(x, y) \rightarrow \infty} \eta_{m,n}(x, y) = 0$$

lo cual prueba el teorema.

CAPITULO III

SERIES DE FACULTAD ASINTOTICAS

8. En la parte I del presente capítulo vamos a estudiar la representación asintótica de una función $f(z)$, mediante series de factoriales

$$\sum_{s=1}^{\infty} \frac{a_s s!}{z(z+1) \dots (z+s)} \quad (z = x + iy) \quad [5]$$

convergentes o divergentes.

Las series factoriales de la forma [5] fueron estudiadas por Jensen, Nielsen, Schlomiech, Pindierle...; pero la verdadera base de una teoría ha dado Landau y Norlung, para los simples, y por Kojima y Adams para las series dobles.

Todos estos trabajos se refieren especialmente al estudio del dominio de convergencia (simple, absoluto y uniforme) y de las propiedades de las funciones $f(z)$ definidas por tales desarrollos en la hipótesis que ellos sean convergentes.

Representación asintótica de este tipo se han presentado por vez primera al desarrollar una función determinante

$$f(z) = \int_0^{\infty} e^{-zs} \varphi(x) dx$$

en series de factoriales ⁽¹⁾; pero el problema fundamental de la representación asintótica de una función dada $f(z)$ cualquiera, mediante una serie de facultad, y el estudio de las propiedades de esta correspondencia aun no ha sido abordado. La limitación del espacio que disponemos nos permitirá solamente enunciar algunos resultados sin entrar en el detalle de sus desarrollos analíticos.

DEFINICIONES. — Dada la serie de facultad

$$\sum_{s=0}^{\infty} \frac{a_{s+1} (s+1)!}{z(z+1) \dots (z+s)}, \quad z = x + iy \quad [1]$$

⁽¹⁾ S. PINCHERLE, *R. della R. Accad. dei Lincei*, 15 maggio (1904) p. 513.
N. NIELSEN, *Ann. de l'Écol. Normale*, t. XIX, p. 437.

convergente o divergente en el semi-plano: $R(z) \geq 0$, diremos que una función $f(z)$ tiene por *desarrollo asintótico* a dicha serie, si

$$\varepsilon_n(z) = z^{n+1} \left[f(z) - \sum_{s=0}^n \frac{a_{s+1} (s+1)!}{z(z+1) \dots (z+s)} \right] \rightarrow 0 \quad [2]$$

cuando $z \rightarrow \infty$ en el semi-plano antes definido.

De la [2] resulta entonces

$$f(z) = \sum_{s=0}^n \frac{a_{s+1} (s+1)!}{z(z+1) \dots (z+s)} + \frac{\varepsilon_n(z)}{z^{n+1}},$$

donde

$$\varepsilon_n(z) \rightarrow 0, \quad z \rightarrow 0, \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

La correspondencia así establecida, expresaremos con la notación

$$f(z) \sim \sum_0^\infty \frac{a_{s+1} (s+1)!}{z(z+1) \dots (z+s)}.$$

Si una función $f(z)$ tiene un desarrollo asintótico en series de factoriales, éste es único en virtud del siguiente teorema:

I. — Si es

$$f(z) \sim a_0 + \frac{a_1 1!}{z} + \frac{a_2 2!}{z(z+1)} + \dots$$

y

$$f(z) \sim b_0 + \frac{b_1 1!}{z} + \frac{b_2 2!}{z(z+1)} + \dots$$

resulta entonces

$$a = b \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

Por hipótesis

$$f(z) = \sum_{s=0}^n \frac{a_{s+1} (s+1)!}{z(z+1) \dots (z+s)} + \frac{\varepsilon_n(z)}{z^{n+1}}$$

$$f(z) = \sum_{s=0}^n \frac{b_{s+1} (s+1)!}{z(z+1) \dots (z+s)} + \frac{\delta_n(z)}{z^{n+1}},$$

$$\lim \varepsilon_n(z) = \lim \delta_n(z) = 0.$$

De aquí resulta

$$0 = (a_0 - b_0) + \frac{(a_1 - b_1) 1!}{z} + \frac{(a_2 - b_2) 2!}{z(z+1)} + \dots + \frac{\varepsilon_n - \delta_n}{z^{n+1}}$$

y haciendo $z \rightarrow \infty$, se tiene

$$a_0 = b_0.$$

Reemplacemos este valor en la relación anterior y multiplicando por z resulta

$$0 = (a_1 - b_1) + \frac{(a_2 - b_2) 2!}{z+1} + \dots + \frac{\varepsilon_n - \delta_n}{z^n},$$

que para $z \rightarrow \infty$ nos da

$$a_1 = b_1.$$

Razonando del mismo modo se deduce sucesivamente que

$$a_2 = b_2, \quad a_3 = b_3 \dots$$

Este desarrollo es por tanto único. La recíproca no se verifica necesariamente.

El algoritmo de Stieljes para obtener el desarrollo de una función en series de potencias asintóticas, se extiende también a las series de facultad. En efecto; sea $f(z)$ una función tal que

$$\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = a_0 \quad (a_0 \text{ finito}),$$

en este caso a_0 da una aproximación de $f(z)$ para valores muy grandes $|z|$.

Supongamos además que se verifiquen las relaciones sucesivas

$$\lim_{z \rightarrow \infty} z [f(z) - a_0] = a_1 \quad \text{es decir} \quad z \left[f(z) - a_0 - \frac{a_1}{z} \right] \rightarrow 0$$

$$\lim_{z \rightarrow \infty} (z+1) \left[z \left(f(z) - a_0 - \frac{a_1}{z} \right) \right] = a_2 2!$$

es decir

$$(z+1) \left\{ z \left[f(z) - a_0 - \frac{a_1}{z} \right] - \frac{2! a_2}{z+1} \right\} \rightarrow 0$$

y, así siguiendo, resulta un desarrollo de la forma

$$a_0 + \frac{a_1!}{z} + \frac{a_2 2!}{z(z+1)} + \frac{a_3 3!}{z(z+1)(z+2)} + \dots$$

que representa asintóticamente la función $f(z)$ en una cierta región del plano z .

Sea la función

$$f(z) = e^{-z}$$

de la variable real $x > 0$.

Es

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x} = 0 = a_0$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x (e^{-x} - 0) = 0 = a_1$$

$$\lim (x+1) [x (e^{-x} - 0) - 0] = 0 = a_2 2!$$

por tanto

$$e^{-x} \sim 0 + \frac{0}{x} + \frac{0}{x(x+1)} + \frac{0}{x(x+1)(x+2)} + \dots$$

9. La correspondencia entre una función y su desarrollo de facultad asintótica, se conserva en las operaciones algebraicas fundamentales.

Si se tiene

$$f(z) \sim \sum_0^{\infty} \frac{a_{s+1} (s+1)!}{z(z+1) \dots (z+s)}$$

y

$$g(z) \sim \sum_0^{\infty} \frac{b_{s+1} (s+1)!}{z(z+1) \dots (z+s)}$$

resulta entonces

$$f(z) \pm g(z) \sim \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(a_{s+1} \pm b_{s+1}) (s+1)!}{z(z+1) \dots (z+s)}.$$

En efecto; por hipótesis

$$f(z) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{a_{s+1} (s+1)!}{z(z+1) \dots (z+s)} + \frac{\varepsilon_n(z)}{z^{n+1}}$$

$$g(z) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{b_{s+1} (s+1)!}{z(z+1) \dots (z+s)} + \frac{\delta_n(z)}{z^{n+1}}$$

de donde

$$f(z) \pm g(z) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(a_{s+1} \pm b_{s+1}) (s+1)!}{z(z+1) \dots (z+s)} + \frac{\eta_n(z)}{z^{n+1}}$$

con

$$\eta_n(z) = \varepsilon_n(z) \pm \delta_n(z).$$

Puesto que $\eta_n(z) \rightarrow 0$, $z \rightarrow \infty$, el teorema queda demostrado.

El teorema I nos prueba que *una función no puede tener más de un desarrollo de facultad asintótica*; en cambio, funciones distintas pueden dar el mismo desarrollo de facultad asintótica.

En efecto; si

$$f(x) \sim a_0 + \frac{a_1!}{x} + \frac{a_2 2!}{x(x+1)} + \dots$$

para x real y positivo la función

$$f(x) + e^{-x}$$

tiene este mismo desarrollo, según el teorema que acabamos de probar.

El desarrollo asintótico de la serie de facultad producto formal de las series (1) y (2) con regla de Nörlund⁽¹⁾, es igual al producto de los desarrollos asintóticos de aquéllos.

Esta proposición se prueba así como también el caso de la integración de un desarrollo asintótico de facultad siguiendo el mismo razonamiento que en los casos anteriores.

Para terminar, vamos ahora a dar algunas nociones sobre la representación asintótica mediante series dobles de facultad.

10. *Series dobles*. — El estudio de las series dobles de facultad

$$(1) \quad \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} \frac{a_{sq} s! q!}{z(z+1) \dots (z+s) w(w+1) \dots (w+q)}$$

desde el punto de vista de su dominio de convergencia acotada, regular y uniforme se inicia en la memoria fundamental de Kōgima⁽²⁾ y en algunas notas de Adams⁽³⁾

La noción de serie doble de facultad asintótica hemos introducido en otro lugar a fin de extender a las integrales dobles de Laplace algunos teoremas fundamentales de Pincherle, Nielsen y Norlund relativo a las integrales simples de Laplace.

(1) N. E. NÖRLUND, *Leçons sur les séries d'interpolation*, GAUTHIER, VILLARS, et. Cit. Paris 1926. pág. 217, fórm. 74 y pág. 223.

(2) *Loc cit.* p. 108.

(3) *Loc cit.* p. 108.

Diremos que la serie doble de facultad [1] de dos variables complejas z y w , representa asintóticamente a la función $f(z, w)$ en la región $\{R(z) > 0, R(w) > 0\}$ y pondremos

$$f(z, w) \sim \sum_0^{\infty} \sum_0^{\infty} \frac{a_{sq} s! q!}{z(z+1) \dots (z+s) w(w+1) \dots (w+q)}$$

si la expresión

$$\varepsilon_{m,n} = z^{m+1} w^{n+1} \left[f(z, w) - \sum_{s=0}^m \sum_{q=0}^n \frac{a_{s+1,q+1} (s+1)! (q+1)!}{z(z+1) \dots (z+s) w(w+1) \dots (w+q)} \right]$$

tiende a cero, cuando $(z, w) \rightarrow \infty$, en los semi-planos antes definidos.

De aquí

$$f(z, w) = \sum_0^m \sum_0^n \frac{a_{s+1,q+1} (s+1)! (q+1)!}{z(z+1) \dots (z+s) w(w+1) \dots (w+q)} + \frac{\varepsilon_{m,n}}{z^{m+1} w^{n+1}}$$

con

$$\varepsilon_{m,n} \rightarrow 0 \quad (z, w) \rightarrow \infty \quad \text{y} \quad m, n = 0, 1, 2, \dots$$

Si la función $f(z, w)$ tiene un desarrollo asintótico (F), este es único. En efecto, si

$$f(z, w) = \sum_0^m \sum_0^n \frac{a_{s+1,q+1} (s+1)! (q+1)!}{z(z+1) \dots (z+s) w(w+1) \dots (w+q)} + \frac{\varepsilon_{m,n}}{z^{m+1} w^{n+1}}$$

y

$$f(z, w) = \sum_0^m \sum_0^n \frac{b_{s+1,q+1} (s+1)! (q+1)!}{z(z+1) \dots (z+s) w(w+1) \dots (w+q)} + \frac{\delta_{m,n}}{z^{m+1} w^{n+1}}$$

resulta

$$0 = \sum_0^m \sum_0^n \frac{c_{s+1,q+1} (s+1)! (q+1)!}{z(z+1) \dots (z+s) w(w+1) \dots (w+q)} + \frac{\varepsilon_{m,n} - \delta_{m,n}}{z^{m+1} w^{n+1}}$$

donde

$$c_{s+1,q+1} = a_{s+1,q+1} - b_{s+1,q+1} \quad (s, q = 0, 1, \dots)$$

Si en esta relación se hace $(z, w) \rightarrow \infty$ resulta

$$c_{11} = 0 \quad \text{es decir} \quad a_{11} = b_{11}$$

Sustituyendo este valor en la relación anterior, multiplicando luego ambos miembros por z y haciendo $(z, w) \rightarrow \infty$, resulta: $a_{12} = b_{12}$. Continuando de tal modo se deduce

$$a_{21} = b_{21} \quad , \quad a_{22} = b_{22} \dots$$

El desarrollo es por tanto único.

Se puede igualmente extender a estos desarrollos asintóticos el algoritmo de Stieltjes, así como también las operaciones suma y multiplicación ⁽¹⁾.

(¹) La regla de multiplicación de dos series simples de facultad y el teorema de NIELSEN-NORLUNG relativo al producto de dos series de facultad convergentes, he dado en mi comunicación «*Sobre un método de sumación de series divergentes*», en los Coloquios matemáticos de la *Sociedad Científica Argentina* (junio 1938).

TABLAS DE LAS LINEAS ÚLTIMAS

POR EL DR. ADOLFO T. WILLIAMS

ABSTRACT

TABLES OF «RAIES ULTIMES». — A complete table of «raies ultimes» with their wavelengths, intensities, series, quantum numbers, exciting potentials and other characteristics is published. Computational data regarding the spectral levels is also included; the even terms have priority as inicial levels.

1. Como memoria complementaria y final de otras ya aparecidas ⁽¹⁾ publicamos ahora una tabla de las líneas últimas en la que figuran sus longitudes de onda, sus intensidades en el arco, en la chispa y en el tubo de Geissler, la indicación de los términos espectrales que les dan origen, con indicación de sus números cuantistas y demás notaciones pertinentes ⁽²⁾; las magnitudes ΔL y ΔJ y los potenciales de excitación, columna que lleva las letras E. P.

En la columna titulada « Observaciones » van indicadas las líneas últimas determinadas por Gramont en sus bien conocidos trabajos ⁽³⁾ con las notaciones por él empleadas. Además figuran las líneas encontradas por Ch. Wateville y por Lundegardh ⁽⁴⁾ en los espectros

⁽¹⁾ Estos *Anales*, **97**, página 15 (1924); **114**, página 261 (1932); **118**, página 88, (1934); **119**, página 55 (1935) y **125**, página 116 (1938). *Contr. Est. Ciencias Fisicomatemáticas*, **4**, página 359 (1928); **5**, páginas 173 y 391 (1929-1931) y **1**, página 41 (1935). *Comptes Rendus*, **187**, página 761 (1928); **193**, página 358 (1931); **199**, página 1201 (1935) y **200**, página 230 (1935). *Physikalische Zeitschrift*, **33**, página 152 (1932) y *Nature*, **124**, página 985 (1929) y **130**, página 313 (1932).

⁽²⁾ Para facilitar la composición tipográfica se han omitido los valores de J.

⁽³⁾ *Analyse Spectrale appliquée aux Recherches de Chimie Minérale*, página 292, Paris (1922); F. Twyman y D. M. Smith, *Wavelength Tables for Spectrum Analysis*, p. 135, Londres (1931), 2ª edición. *Physikalische Methoden der Analytischen Chemie; erster Teil. Spektroskopische und Radiometrische Analyse*, página 66, Leipzig (1933). *Critical Tables*, **5**, página 322 (1929). Tabla establecida por W. F. Meggers.

⁽⁴⁾ *Spectres de Flammes. Variations Spectrales d'ordre thermique*. Thèse de Paris (1904) y F. Twyman y D. M. Smith, Obra citada, página 132.

de la llama con la letra L; las líneas que son emitidas por la fulguración eléctrica de las soluciones salinas según Pollok y Leonard y según el autor ⁽¹⁾ con la letra W y, finalmente, las líneas originadas por el salto de dos electrones llevan la indicación 2e.

En la tabla I figuran las líneas del arco, en la tabla II las correspondientes a los distintos espectros de chispa (átomos ionizados), y en la tabla III se hace una estadística de los niveles fundamentales y de excitación correspondientes a las mismas. Finalmente en la tabla IV figura un cómputo total de las líneas últimas clasificadas y sin clasificar.

Tanto los átomos neutros como los ionizados están ordenados de acuerdo con la ley periódica.

Próximamente aparecerán estas mismas tablas en los *Anales de la Asociación Química Argentina*, pero dispuestos en forma diferente para su empleo en el análisis espectroquímico. Se las ha dividido, por dicha razón, en tres secciones según los métodos de observación que deben usarse: Espectro visible, espectro ultravioleta y espectro ultravioleta extremo.

2. Las tablas numéricas que van a continuación contienen las líneas últimas con los datos numéricos que hemos mencionado en el párrafo anterior.

⁽¹⁾ F. Twyman y D. M. Smith. Obra citada, página 72 y A. T. Williams, *Investigaciones experimentales sobre los espectros de la descarga oscilante*, Buenos Aires (1925) y estos *Anales* 97, página 15 (1924).

TABLA I
ATOMOS NEUTROS

λ I. A	I		Serie	ΔI	Δj	E. P	Observaciones
	a	c					

Columna I (a)

H

6562,79	10	$^2P^\circ - ^2D$	-1	0, -1	10,02	U.
4861,33	10	$^2P^\circ - ^2D$	-1	0, -1	10,02	
1215,70	10	$^2S - ^2P^\circ$	-1	0, -1	0,0	

Li

6707,86	10R	10R	$^2S - ^2P^\circ$	-1	0, -1	0,0	U; L.
6103,59	10R	10	$^2P^\circ - ^2D$	-1	0, -1	1,84	
4971,93	7	4	$^2P^\circ - ^2S$	+1	0, -1	1,84	U.
4603,20	9R	10	$^2P^\circ - ^2D$	-1	0, -1	1,84	
4273,30	5	2	$^2P^\circ - ^2S$	+1	0, +1	1,84	
4134,40	1	—	$^2P^\circ - ^2P^\circ$	0	0	1,84	
4132,40	2R	—	$^2P^\circ - ^2D$	-1	0, -1	1,84	
3232,67	8R	8R	$^2S - ^2P^\circ$	-1	0, -1	0,0	
2741,30	10R	2R	$^2S - ^2P^\circ$	-1	0, -1	0,0	

Na

6160,80	5	4	$^2P^\circ - ^2S$	+1	+1	2,09	U.
6154,40	4	3	$^2P^\circ - ^2S$	+1	0	2,09	
5895,32	8R	10	$^2S - ^2P^\circ$	-1	0	0,0	U; L.
5889,96	10R	10	$^2S - ^2P^\circ$	-1	-1	0,0	U; L.
5688,30	8	7 _r	$^2P^\circ - ^2D$	-1	0, -1	2,09	U.
5682,80	7	6 _r	$^2P^\circ - ^2D$	-1	-1	2,09	U.
4983,20	5	4	$^2P^\circ - ^2D$	-1	0, -1	2,09	U.
4979,00	5	4	$^2P^\circ - ^2D$	-1	-1	2,09	U.
3302,94	8R	8R	$^2S - ^2P^\circ$	-1	0	0,0	U; L.
3302,34	9R	9R	$^2S - ^2P^\circ$	-1	-1	0,0	U; L.
2852,80	4R	2	$^2S - ^2P^\circ$	-1	-1	0,0	

λ I. A	I		Serie	Δl	Δj	E. P	Observaciones
	a	c					

K

7699,01	10R	5R	$^2S - ^2P^o$	-1	0	0,0	L.
7664,94	10R	5R	$^2S - ^2P^o$	-1	-1	0,0	U; L.
6939,00	10	—	$^2P^o - ^2S$	+1	+1	1,61	
6911,30	10	—	$^2P^o - ^2S$	+1	0	1,61	
5832,10	7R	4	$^2P^o - ^2D$	-1	0, -1	1,61	
5812,40	6R	2	$^2P^o - ^2D$	-1	-1	1,61	
5801,90	6R	4	$^2P^o - ^2S$	+1	+1	1,61	
5782,60	5R	3	$^2P^o - ^2S$	+1	0	1,61	
4047,22	10R	10R	$^2S - ^2P^o$	-1	0	0,0	U; L.
4044,16	10R	10R	$^2S - ^2P^o$	-1	-1	0,0	U; L.
3447,38	6R	2	$^2S - ^2P^o$	-1	0	0,0	
3446,37	8R	3	$^2S - ^2P^o$	-1	-1	0,0	
3217,60	4R	—	$^2S - ^2P^o$	-1	0	0,0	
3217,10	6R	—	$^2S - ^2P^o$	-1	-1	0,0	
3102,20	2R	—	$^2S - ^2P^o$	-1	0	0,0	
3102,00	4R	—	$^2S - ^2P^o$	-1	-1	0,0	

Rb

7947,63	10R	—	$^2S - ^2P^o$	-1	0	0,0	U.
7800,30	10R	—	$^2S - ^2P^o$	-1	-1	0,0	U.
6298,50	10	3	$^2P^o - ^2D$	-1	0	1,58	
6159,84	5	1	$^2P^o - ^2S$	+1	0	1,55	
5724,50	4	2	$^2P^o - ^2D$	-1	-1	1,58	
4215,58	7R	5R	$^2S - ^2P^o$	-1	0	0,0	U; L.
4201,81	8R	7R	$^2S - ^2P^o$	-1	-1	0,0	U.

Cs

8943,60	6R	—	$^2S - ^2P^o$	-1	0	0,0	
8521,15	10R	—	$^2S - ^2P^o$	-1	-1	0,0	
4593,20	10R	3	$^2S - ^2P^o$	-1	0	0,0	
4555,30	10R	4	$^2S - ^2P^o$	-1	-1	0,0	U; L.

Columna I (b)

Cu

5782,13	8	8	$^2D - ^2P^o$	+1	+1	1,62	2 e
5700,25	8	10	$^2D - ^2P^o$	+1	0	1,62	2 e
5218,21	10	10	$^2P^o - ^2D$	-1	-1	3,80	
5153,24	8	8	$^2P^o - ^2D$	-1	-1	3,80	

λ I. A	I		Serie	Δl	Δj	E. P	Observaciones
	a	c					

Cu

5105,55	7	6	$^2D - ^2P^\circ$	+1	+1	1,38	$2e$
3273,96	10R	10R	$^2S - ^2P^\circ$	-1	0	0,0	U; L. W.
3247,55	10R	10R	$^2S - ^2P^\circ$	-1	-1	0,0	U; L. W.
2961,18	9	6	$^2D - ^2F^\circ$	-1	-1	1,38	W.
2824,38	10	5	$^2D - ^2D^\circ$	0	0	1,38	W.
2618,38	10R	3	$^2D - ^2P^\circ$	+1	+1	1,38	$2e$; W.
2230,09	4R	2R	$^2D - ^2F^\circ$	-1	-1	1,38	W.
2227,76	4R	1R	$^2D - ^2F^\circ$	-1	-1	1,62	W.

Ag

5471,51	6	5	$^2P^\circ - ^2D$	-1	0	3,78	U.
5465,43	10	6	$^2P^\circ - ^2D$	-1	-1	3,78	
5209,04	10R	10	$^2P^\circ - ^2D$	-1	-1	3,64	
4668,54	8	3	$^2P^\circ - ^2S$	+1	+1	3,78	
4212,01	8R	4R	$^2P^\circ - ^2D$	-1	0	3,78	
3382,89	10R	9R	$^2S - ^2P^\circ$	-1	0	0,0	U; L.
3280,67	10R	9	$^2S - ^2P^\circ$	-1	-1	0,0	U; L.
2375,00	8	3					
2309,54	6R	4					

Au

6278,20	4	3	$^2D - ^2P^\circ$	+1	+1	2,65	$2e$
5837,41	4	6	$^2P^\circ - ^2S$	+1	0	4,60	
5064,61	2	3	$^2D - ^2P^\circ$	+1	0	2,65	$2e$
4792,62	8	6	$^2P^\circ - ^2D$	-1	-1	5,08	
3122,79	6R	8	$^2D - ^2P^\circ$	+1	+1	1,13	$2e$
3033,26	2	2					
3029,19	6	5	$^2D - ^2F^\circ$	-1	-1	1,13	
2883,45	4	3	$^2D - 9^\circ$	?	?	2,65	
2748,26	4R	6	$^2D - ^4F^\circ$	-1	-1	1,13	$\Delta R = 2.$
2675,95	10R	10	$^2S - ^2P^\circ$	-1	0	0,0	U; L.
2427,96	10R	10R	$^2S - ^2P^\circ$	-1	-1	0,0	U.

λ I. A	I		Serie	Δl	Δj	E. P	Observaciones
	a	c					

Columna II (a)

Be

4572,69	8	1	$1P^{\circ} - 1D$	-1	-1	5,25	
3321,35	10	3	$3P^{\circ}$		+1	2,72	
3321,08	10	3	$3P^{\circ}$	+1	0	2,72	
3321,01			$3P^{\circ}$		-1	2,72	
2650,94	9	7	$3P^{\circ} - 3P$	0	0	2,72	
2650,31	9	7					
2494,87	8	6	$3P^{\circ} - 3D$	-1	-1	2,72	
2494,48	8	6	$3P^{\circ} - 3D$			2,72	
2494,44	8	6	$3P^{\circ} - 3D$			2,72	
2348,62	10R	5	$1S - 1P^{\circ}$	-1	-1	0,0	U.

Mg

5528,48	10	5	$1P^{\circ} - 1D$	-1	-1	4,34	U.
5183,60	10R	10	$3P^{\circ} - 3S$	+1	+1	2,70	
5172,68	10R	10			0		
5167,33	8R	10			-1		
4703,07	10	5	$1P^{\circ} - 1D$	-1	-1	4,34	W.
4571,12	5	2	$1S^{\circ} - 3P$	-1	-1	0,0	$\Delta R = 2$
3838,29	10R	10R	$3P^{\circ} - 3D$	-1	-1	2,70	W.
3832,31	10R	10R					W.
3829,36	8R	10R					W.
3096,92	10R	2					W.
3093,05	8R	2					
3091,09	8R	1					
2852,13	10R	10	$1S - 1P^{\circ}$	-1	-1	0,0	U, L. W.
2782,98	6R	6R	$3P$	0	+1	2,70	W.
2781,43	6R	6R	$3S$	+1	+1	2,70	W.
2779,85	8R	8R	$3P^{\circ}$	0	0	2,70	W.
2778,29	6R	6R	$3S$	+1	0	2,70	W.
2776,71	6R	6R	$3S$	+1	-1	2,70	W.

Ca

6493,70	8	5	$3D - 3F^{\circ}$	-1	-1	2,52	
6462,57	6R	6		-1	-1	2,52	
6439,06	10R	8		-1	-1	2,52	
6162,19	10R	8R	$3P^{\circ} - 3S$	+1	+1	1,87	
6122,24	10R	10R	$3P^{\circ} - 3S$	+1	0	1,87	
5590,10	10	6	$3D - 3D^{\circ}$	0	-1	2,52	L.
5588,74	—	10	$3D - 3D^{\circ}$	0	0	2,52	L.

λ I. A	I		Serie	ΔI	Δj	E. P	Observaciones
	a	c					

Ca

4456,62	4	5	$\left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \right\} \begin{array}{l} {}^3D \\ > \\ > \\ > \\ > \\ > \\ > \\ > \end{array}$	—1	—1	1,87		
4455,88	8R	8		>	—1	—1	1,87	
4454,78	10R	10R		>	—1	—1	1,87	W.
4435,68	8R	8		>	—1	0	1,87	W.
4434,96	10R	10R		>	—1	—1	1,87	W.
4425,44	10R	10		>	—1	—1	1,87	L. W.
4318,65	8R	8R		${}^3P$	0	+1	1,87	W.
4302,53	10R	10R		>	0	0	1,87	W.
4289,36	8R	8R	>	0	—1	1,87	W.	
4283,10	8R	8R	>	0	—1	1,87	W.	
4226,72	10R	10R	${}^1S$ — ${}^1P^\circ$	—1	—1	0,0	U; L. W.	
3644,39	10	4	${}^3P^\circ$ — ${}^3D$	—1	—1	1,87	W.	
3006,86	4	4	${}^3P^\circ$ — ${}^3D$	—1	—1	1,87	W.	
3000,87	4	2	$\left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right\} \begin{array}{l} {}^3P \\ {}^3P \\ {}^3P \\ {}^3P \end{array}$	0	+1	1,87	2e	
2999,67	4	3		${}^3P$	0	0	1,87	»
2997,31	3	2		${}^3P$	0	—1	1,87	»
2994,95	3	2		${}^3P$	0	—1	1,87	»

Sr

4962,25	6R	2	$^3P^\circ$ —	^3D	—1	—1	1,84	W.
4872,48	6	2		^3D	—1	—1	1,79	W.
4832,07	6	5		^3D	—1	—1	1,77	W.
4607,34	10R	6	^1S — $^1P^\circ$		—1	—1	0,0	U; L. W.
3366,34	5	2	$^3P^\circ$ — $^3P'$		0	+1	1,84	
3351,26	6R	2	$^3P^\circ$ — ^3P		0	0	1,84	
2931,83	3	1	^1S — $^1P^\circ$		—1	—1	0,0	

Ba

5777,70	10R	5	$^3P^\circ$ — ^3D		—1	—1	1,67	
5535,53	10R	6	^1S — $^1P^\circ$		—1	—1	0,0	U; L.
5519,11	8R	5	$^3P^\circ$ — ^3D		—1	—1	1,56	
5424,63	7	3	$^3P^\circ$ — ^3D		—1	—1	1,52	
4591,80	3	1	^3D — $^3P^\circ$		+1	0	1,11	
4488,97	7	2	$^3P^\circ$ — ^3D		—1	—1	1,67	
4467,14	3	1						
4132,44	5	3	^1S — $^3D^\circ$		—2	—1	0,0	$\Delta R = 2; 2e$
3501,12	8R	2	^3D — $^1F^\circ$		—1	—1	1,35	$\Delta R = 2; W.$
3071,60	8R	6R	^1S — $^1P^\circ$		—1	—1	0,0	

λ I. A	I		Serie	Δl	Δj	E. P	Observaciones
	a	c					
Ra							
4825,94	10	10	$^1S - ^1P^o$	-1	-1	0,0	U.
Zn							
6362,35	10	10	$^1P^o - ^1D$	-1	-1	5,77	
4810,53	10R	10	$^3P^o$	+1	+1	4,05	U. W.
4722,16	10R	10	$^3P^o \left. \vphantom{\begin{matrix} \\ \end{matrix}} \right\} - ^3S$	+1	0	4,01	U. W.
4680,14	10R	10	$^3P^o \left. \vphantom{\begin{matrix} \\ \end{matrix}} \right\}$	+1	-1	4,00	W.
3345,51	8R	10	$^3P^o - ^3D$	-1	0	4,05	W.
3345,00	10R	10	$^3P^o - ^3D$	-1	0	4,05	W.
3303,00	8R	10	$\left. \vphantom{\begin{matrix} \\ \end{matrix}} \right\} ^3D$	-1	0	4,01	W.
3302,60	8R	10	$\left. \vphantom{\begin{matrix} \\ \end{matrix}} \right\} ^3D$	-1	-1	4,01	W.
3282,32	8R	10	$\left. \vphantom{\begin{matrix} \\ \end{matrix}} \right\} ^3D$	-1	-1	4,00	W.
2800,80	7R	10	$\left. \vphantom{\begin{matrix} \\ \end{matrix}} \right\} ^3D$	-1	-1	4,05	W.
2771,00	6R	—	$^3P^o - \left. \vphantom{\begin{matrix} \\ \end{matrix}} \right\} ^3D$	-1	0	4,01	W.
2770,95	8R	8	$\left. \vphantom{\begin{matrix} \\ \end{matrix}} \right\} ^3D$	-1	-1	4,01	W.
2608,60	8R	3	$\left. \vphantom{\begin{matrix} \\ \end{matrix}} \right\} ^3D$	-1	+1	4,05	W.
2582,50	8R	2	$\left. \vphantom{\begin{matrix} \\ \end{matrix}} \right\} ^3D$	-1	0	4,01	W.
2138,51	3R	2R	$^1S - ^1P^o$	-1	-1	0,0	U. W.
Cd							
6438,47	10	10R	$^1P^o - ^1D$	-1	-1	5,39	
5085,82	10R	10	$\left. \vphantom{\begin{matrix} \\ \end{matrix}} \right\} ^3P^o - ^3S$	+1	+1	3,93	
4799,91	10R	10	$\left. \vphantom{\begin{matrix} \\ \end{matrix}} \right\}$	0	0	3,78	
4678,15	10R	10	$\left. \vphantom{\begin{matrix} \\ \end{matrix}} \right\}$	-1	-1	3,72	
3612,88	8R	9	$\left. \vphantom{\begin{matrix} \\ \end{matrix}} \right\}$	-1	0	3,93	W.
3610,51	10R	10R	$\left. \vphantom{\begin{matrix} \\ \end{matrix}} \right\}$	-1	-1	3,93	W.
3467,66	8R	10	$^3P^o - ^3D$	-1	0	3,78	W.
3466,20	10R	8	$\left. \vphantom{\begin{matrix} \\ \end{matrix}} \right\}$	-1	-1	3,78	W.
3403,65	10R	10	$\left. \vphantom{\begin{matrix} \\ \end{matrix}} \right\}$	-1	-1	3,72	W.
3261,05	10R	7	$^1S - ^3P^o$	-1	-1	0,0	$\Delta R = 2; L.$
3252,52	8	6	$^3P^o - ^3S$	+1	+1	3,93	W.
2980,62	8R	6	$^3P^o - ^3D$	-1	-1	3,93	W.
2836,90	8R	6	$^3P^o - ^3D$	-1	-1	3,72	W.
2288,03	10R	10R	$^1S - ^1P^o$	-1	-1	0,0	U. W.

λ I. A	I		Serie	Δl	Δj	E. P	Observaciones
	a	c					

Hg

5790,66	10R	10	$1P^\circ - 1D$	-1	-1	6,65	
5769,60	10R	10	$1P^\circ - 3D$	-1	-1	6,65	$\Delta R = 2.$
5460,72	10R	10	$3P^\circ$		+1	5,45	
4358,34	10	—	$3P^\circ$	+1	0	4,85	
4046,77	7	10	$3P^\circ$		-1	4,65	
3663,27	10R	10R	$1D$	-1	0	5,45	$\Delta R = 2.$
3662,88	6	—	$2D$	-1	+1	5,45	
3654,83	6R	10	$2D$	-1	0	5,45	
3650,15	10R	10R	$3D$	-1	-1	5,45	
3131,84	8R	4R	$1D$	-1	-1	4,85	$\Delta R = 2.$
3131,56	8R	5R	$3D$	-1	0	4,85	
3125,62	10R	10	$3D$	-1	-1	4,85	
3021,50	4R	4	$3D$	-1	-1	5,45	
2967,28	10R	10R	$3D$	-1	-1	4,65	
2655,14	4R	1	$1D$	-1	-1	4,85	$\Delta R = 2.$
2653,69	4R	2	$3D$	-1	0	4,85	
2652,07	5R	2	$3D$	-1	-1	4,85	
2536,52	10R	10R	$1S - 3P^\circ$	-1	-1	0,0	$\Delta R = 2; U; L.$
2534,78	8R	1	$3P^\circ - 3D$	-1	-1	4,65	
1849,60	10	10	$1S - 1P^\circ$	-1	-1	0,0	U. ⁽¹⁾

Columna III (a)

B

2497,73	10R	10R	$2P^\circ - 2S$	+1	+1	0,0	U.
2496,78	9R	9R	$2P^\circ - 2S$	+1	0	0,0	U.

Al

3961,54	10R	8R	$2S$	+1	+1	0,0	U.
3944,03	10R	8R	$2S$	+1	0	0,0	U.
3092,85	6R	4R	$2D$	-1	0	0,0	
3092,72	10R	8R	$2D$	-1	-1	0,0	
3082,16	10R	8	$2D$	-1	-1	0,0	
2660,35	10R	5R	$2S$	+1	+1	0,0	
2652,48	10R	10R	$2S$	+1	0	0,0	
2575,11	10R	6R	$2D$	-1	-1	0,0	
2567,90	10R	6R	$2D$	-1	-1	0,0	
2373,13	8R	4R	$2D$	-1	-1	0,0	
2367,06	8R	4R	$2D$	-1	-1	0,0	
2269,09	4R	2R	$2D$	-1	-1	0,0	
2263,45	4R	2R	$2D$	-1	-1	0,0	

⁽¹⁾ Memorias citadas, C.E.C.F.M., 5, pág. 173; *Nature* 124, pág. 985 y C.R. 187, pág. 761.

λ I. A	I		Serie	Δl	Δj	E. P	Observaciones
	a	c					

Ga

4172,05	10R	10R	$^2P^\circ -$	^2S	+1	+1	0,12	U.
4033,01	10R	10R		^2S	+1	0	0,0	
2943,64	10R	2		^2D	-1	-1	0,12	
2874,24	10R	2		^2D	-1	-1	0,0	

In

4511,31	10R	10R	$^2P^\circ -$	^2S	+1	+1	0,27	U.
4101,76	8R	10		^2S	+1	0	0,0	U.
3258,56	6R	3		^2D	-1	0	0,27	
3256,08	10R	8R		^2D	-1	-1	0,27	
3039,35	10R	4R		^2D	-1	-1	0,0	
2710,26	10R	3		^2D	-1	-1	0,27	

Tl

6714,30	4	2	$^2S - ^2P^\circ$	-1	0	3,29	U; L. U; L. L. L.
6550,00	6	3	$^2S - ^2P^\circ$	-1	-1	3,29	
5350,47	10R	10	$^2P^\circ -$	^2S	+1	+1	0,96
3775,73	10R	10R		^2S	+1	0	0,0
3519,21	10R	10R		^2D	-1	-1	0,96
3229,76	10R	1		^2S	+1	+1	0,96
2918,33	10R	1		^2D	-1	-1	0,96
2767,88	10R	10		^2D	-1	-1	0,0

Columna III (b)

Sc

6305,72	10	1	$^2D - ^2D^\circ$	0	0	0,0	U.
5686,85	10	1	$^4F - ^4G^\circ$	-1	-1	1,43	
5671,83	10	1	$^4F - ^4G^\circ$	-1	-1	1,43	
5087,00	5	1	$^2G - ^2F^\circ$	+1	+1	2,50	
5085,54	5	1	$^4F - ^4F^\circ$	0	0	1,43	
5083,72	6	2	$^4F - ^4F^\circ$	0	0	1,43	
5081,62	7	2	$^4F - ^4F^\circ$	0	0	1,43	
4023,72	10	8	$^2D - ^2D^\circ$	0	0	0,0	
4020,42	10	8	$^2D - ^2D^\circ$	0	0	0,0	
3911,86	10	6	$^2D - ^2F^\circ$	-1	-1	0,0	
3907,54	10	6	$^2D - ^2F^\circ$	-1	-1	0,0	

λ I. A	I		Serie	Δl	Δj	E. P	Observaciones
	a	c					

Y

5644,69	4R	1	$^4F - ^4G^\circ$	-1	0	1,39	U.
4674,84	8	5	$^2D - ^2F^\circ$	-1	-1	0,06	
4643,69	8	5	$^2D - ^2F^\circ$	-1	-1	0,0	
4142,87	8R	8	$^2D - ^2D^\circ$	0	0	0,0	
4102,38	9R	8	$^2D - ^2F^\circ$	-1	-1	0,06	
4077,38	2	5	$^2D - ^2F^\circ$	-1	-1	0,0	
3620,94	10	8	$^2D - ^2P^\circ$	+1	+1	0,06	

Grupo de las tierras raras

La

6249,94	7R	4	$^4F - ^4G^\circ$	-1	-1	0,51	U. 2e.
5930,59	6R	—	$^2D - ^2F^\circ$	-1	-1	0,12	
5455,14	8	1	$^2D - ^2D^\circ$	0	0	0,12	
4104,89	5	1	$^4F - ^4G^\circ$	-1	-1	0,31	
3249,35	5	3					
3245,12	6	4					
2892,09	4	2					
2885,14	4	2					
2808,36	5	3					
2610,34	4	5					

Ce

5512,05	8	3					U. U.
5079,68	5	2					
4628,15	10	10					
4593,93	10	10					
4572,28	10	10					
4562,35	10	10					
4539,73	10	5					
4528,45	10	5					
4527,35	10	5					
4523,08	8	5					
4382,18	8	5					
4320,73	8	3					
4306,73	8	4					
4186,60	10	10					
4165,61	9	10					
4040,76	9	8					
4012,40	10	10					
3344,76	7	2					
3272,25	7	2					
3234,17	7	2					
3063,00	6	2					
2651,02	4	1					

λ I . A	I		Serie	Δl	Δj	E . P	Observaciones
	a	c					

Pr

4225,34	10	10					
4189,52	10	10					
4179,43	10	10					
4062,83	10	8					

Nd

4542,60	5	5					L.
4462,96	10	10					L.
4451,55	10	10					
4446,37	10	10					
4358,20	9	8					
4325,77	10	5					
4303,61	10	10					L.
4177,34	9	10					L.
4156,16	10	10					
3951,15	9	8					

Sm

4467,33	9	10					
4434,34	10	8					U.
4424,35	10	10					U.
4421,14	9	5					
4390,87	10	10					

Eu

4205,03	10	10					
4129,72	10	10					U.

Gd

3768,40	10	10					
3646,19	10	10					

λ I. A	I		Serie	Δl	Δj	E. P	Observaciones
	a	c					

Tb

3874,19	10	10					
3848,76	10	10					
3561,75	10	10					
3509,18	10	10					

Dy

4211,74	10	5					
4167,99	10	4					
4077,98	10	10					
4046,00	10	4					
4000,50	8	10					

Ho

3891,02	10	10					
3748,19	10	10					

Er

4675,61	5	10					
4448,62	4	2					
4426,77	4	2					
4419,62	8	10					
4409,34	5	2					
4301,61	5	3					
4298,90	5	2					
4230,19	6	3					
4184,97	4	—					
3906,34	10	10					
3692,65	—	10					
3499,12	10	10					
3323,20	5	4					

Tu

3761,91	} 8	7					
3761,34							
3462,21	10	10					

λ I. A	I		Serie	Δl	Δj	E. P	Observaciones
	a	c					

Yb

3988,01	10	10					U.
3694,20	10R	10					U.
3289,37	10R	10					U.

Lu

4518,54	10	5					
3359,59	10	5	$^2D - ^2F^o$	-1	-1	0,25	

Columna IV (a)

C

2478,60	10	10	$^1S - ^1P^o$	-1	-1	2,66	U.
2296,80	6	6					

Si

3905,52	10	5	$^1S - ^1P^o$	-1	-1	1,90	U.
2881,59	10R	10	$^1D - ^1P^o$	+1	+1	0,78	
2528,52	10R	8	$^3P - ^3P^o$	0	0	0,0	
2524,12	10R	6	$^3P - ^3P^o$	0	+1	0,0	
2519,21	8R	5	$^3P - ^3P^o$	0	0	0,0	
2516,12	10R	10	$^3P - ^3P^o$	0	0	0,0	U.
2514,32	8R	5	$^3P - ^3P^o$	0	-1	0,0	
2506,90	10R	6	$^3P - ^3P^o$	0	-1	0,0	
2435,16	5R	5	$^1D - ^1D^o$	0	0	0,78	

Ge

4685,90	5	10	$^1S - ^3P^o$	-1	-1	2,02	$\Delta R = 2.$
4226,61	50	—	$^1S - ^1P^o$	-1	-1	2,02	
3269,49	10	10	$^1D - ^3P^o$	+1	+1	0,88	U; $\Delta R = 2.$
3124,84	10	5	$^1D - ^3P^o$	+1	0	0,88	$\Delta R = 2.$
3039,08	10R	10R	$^1D - ^1P^o$	+1	+1	0,88	U.
2754,59	10	10R	$^3P - ^3D^o$	-1	+1	0,17	
2709,61	10	10R	$^3P - ^3P^o$	0	+1	0,07	
2691,35	10	10	$^3P - ^3P^o$	0	0	0,07	
2651,60	10	10R	$^3P - ^3P^o$	0	-1	0,0	
2651,15	10	10R	$^3P - ^3P^o$	0	0	0,17	
2592,55	10	10R	$^3P - ^3P^o$	0	-1	0,07	

λ I. A	I		Serie	Δl	Δj	E. P	Observaciones
	a	c					

Sn

4524,74	6	10	$^1S - ^1P^0$	-1	-1	2,12	
3801,03	9R	9R	$^1D - ^3P^0$	+1	+1	1,06	$\Delta R = 2$.
3330,60	6R	6R	$^1D - ^3P^0$	+1	0	1,06	$\Delta R = 2$.
3262,33	10R	5R	$^1D - ^1P^0$	+1	+1	1,06	U.
3175,05	10R	9R	$^3P - ^3P^0$	0	+1	0,42	
3034,12	9R	8R	$^3P - ^3P^0$	0	+1	0,21	
3009,14	9R	8R	$^3P - ^3P^0$	0	0	0,21	
2863,32	8R	6R	$^3P - ^3P^0$	0	-1	0,0	U.
2839,99	8R	10R	$^3P - ^3P^0$	0	0	0,42	
2706,50	7R	7R	$^3P - ^3P^0$	0	-1	0,21	
2661,25	5R	4R	$^3P - ^1P^0$	0	0	0,21	$\Delta R = 2$.
2429,50	7R	8R	$^3P - ^3F^0$	-2	-1	0,42	$^3D^0; \Delta l = -1?$
2354,84	5R	6R	$^3P - ^3F^0$	-2	-1	0,21	$^3D^0; \Delta l = -1?$

Pb

6002,00	8	—					
5201,47	3	1	$^1S - ^3P^0$	-1	-1	3,64	$\Delta R = 2$.
5005,45	4	2	$^1S - ^1P^0$	-1	-1	3,64	
4168,04	3R	10	$^1D - ^1P^0$	?	0	2,64	
4057,83	5R	10R	$^3P - ^3P^0$	0	+1	1,32	U; L.
3739,95	5R	4R					
3683,47	3R	10	$^3P - ^3P^0$	0	+1	0,96	U; L.
3671,50	3R	10	$^1D - ^3P^0$	+1	+1	2,64	$\Delta R = 2$.
3639,58	6R	10R	$^3P - ^3P^0$	0	0	0,96	L.
3572,74	5R	10	$^1D - ^1P^0$	+1	+1	2,64	
2873,32	6R	10R	$^3P - ^1P^0$	?	0	1,32	
2833,07	6R	10R	$^3P - ^3P^0$	0	-1	0,0	L.
2823,20	4R	10R	$^3P - ^2P^0$	?	0	1,32	
2802,01	5R	10R	$^3P - ^4P^0$	?	-1	1,32	
2663,17	3R	10R	$^3P - ^3P^0$	0	0	0,96	
2614,20	6R	5R	$^3P - ^2P^0$	?	0	0,96	L.
2613,68	3R	3R	$^3P - ^3P^0$	?	0	0,96	
2577,28	6R	3R	$^3P - ^1P^0$	0	+1	1,32	$\Delta R = 2$.
2476,39	4R	2R	$^3P - ^3P^0$	0	-1	0,96	
2393,81	8R	3R	^3P	?	+1	1,32	
2175,60	4R	—	$^3P \} - ^3P^0$	?	0	0,96	
2170,00	6R	2R	^3P	?	-1	0,0	U; $^3D^0$?

λ I. A	I		Serie	Δl	Δj	E. P	Observaciones
	a	c					

Columna IV (b)

Ti

5016,17	8	5	${}^5F$ —	${}^5G^{\circ}$	—1	—1	0,83	U; 2e. 2e. 2e. 2e.
5014,25	10	9		${}^5G^{\circ}$	—1	—1	0,83	
5007,21	9	10		${}^5G^{\circ}$	—1	—1	0,83	
4999,51	10	10		${}^5G^{\circ}$	—1	—1	0,83	
4991,07	9	10		${}^5G^{\circ}$	—1	—1	0,83	
4981,73	9	10		${}^5G^{\circ}$	—1	—1	0,83	
4533,25	10R	5	${}^3F$ —	${}^5F^{\circ}$	0	0	0,83	
3998,64	10	6		${}^3F^{\circ}$	0	0	0,0	
3989,76	10	6		${}^3F^{\circ}$	0	0	0,0	
3981,77	10	3		${}^3F^{\circ}$	0	0	0,0	
3964,27	7	3		${}^3F^{\circ}$	0	—1	0,0	
3958,21	10	5		${}^3D^{\circ}$	+1	+1	0,0	
3956,34	10	4	${}^3F$ —	${}^3D^{\circ}$	+1	+1	0,0	
3653,49	10R	4		${}^3G^{\circ}$	—1	—1	0,0	
3642,68	10R	3		${}^3G^{\circ}$	—1	—1	0,0	
3635,47	9R	3		${}^3G^{\circ}$	—1	—1	0,0	
3377,59	8	3		${}^3D^{\circ}$	+1	+1	0,0	
3371,46	9	2		${}^3G^{\circ}$	—1	—1	0,0	
3354,64	8	3	${}^3F$ —	${}^3G^{\circ}$	—1	—1	0,0	
3341,87	10R	10R		${}^3G^{\circ}$	—1	—1	0,0	
3199,92	9R	3		${}^3G^{\circ}$	—1	—1	0,0	
				${}^3G^{\circ}$	—1	—1	0,0	

Zr

4815,62	8	3	${}^5F$ —	${}^5G^{\circ}$	—1	—1	0,60	U. 2e. 2e. 2e; $\Delta R = 2$.
4805,87	5	2		${}^5G^{\circ}$	—1	0	0,68	
4788,68	6	2		${}^5G^{\circ}$	—1	0	0,73	
4772,31	8	4		${}^5G^{\circ}$	—1	—1	0,62	
4739,48	10	5		${}^5G^{\circ}$	—1	—1	0,65	
4710,08	10	5		${}^5G^{\circ}$	—1	—1	0,68	
4687,80	10	8	${}^3F$ —	${}^5G^{\circ}$	—1	0	0,73	
3601,19	6	4		${}^3G^{\circ}$	—1	—1	0,15	
3547,69	7	3		${}^3G^{\circ}$	—1	—1	0,07	
3519,61	8	3		${}^3G^{\circ}$	—1	—1	0,0	
3419,65	2	1		${}^3P$ — ${}^3F^{\circ}$	—2	—1	0,52	
2918,25	5	3		${}^3P$ — ${}^3D^{\circ}$	—1	—1	0,52	
2916,00	5	3	${}^3F$ — ${}^1D^{\circ}$		+1	+1	0,07	

λ I. A	I		Serie	Δl	Δj	E. P	Observaciones
	a	c					

Hf ⁽¹⁾

4174,33	30	3	$^3F - 16^\circ$	0	0	0,29	$^3F^\circ$
4093,17	40	25					U.
3777,64	30	4	$^3F - 17^\circ$	+1	+1	0,0	$^3D^\circ$
3332,73	20	2	$^3F - 29^\circ$	-1	-1	0,0	$^3G^\circ$
3072,88	30	4	$^3F - 34^\circ$	0	0	0,0	$^3F^\circ$
2964,88	20	3	$^3F - 47^\circ$	-1	-1	0,29	$^3G^\circ$
2950,68	20	3	$^3F - 48^\circ$	0	0	0,29	$^3F^\circ$
2940,77	25	4	$^3F - 40^\circ$	-1	-1	0,0	$^3G^\circ$
2916,49	30	5	$^3F - 41^\circ$	0	0	0,0	$^3F^\circ$
2904,76	20	2	$^3F - 50^\circ$	+1	+1	0,29	$^3D^\circ$
2904,42	20	3	$^3F - 56^\circ$	0	0	0,56	$^3F^\circ$
2898,26	25	3	$^3F - 51^\circ$	-1	-1	0,29	$^3G^\circ$

Th

5049,77	7	3					
5017,24	8	3					
4919,80	9	6					
4863,17	9	8					
3188,22	5	5					
3108,26	4	5					
2942,80	3	3					
2870,53	3	3					
2837,30	4	5					
2832,33	4	4					
2692,40	3	3					

Columna V (a)

N

5005,10	?						
5001,34	?						
4447,00	?						
4109,94	15	$^2P - ^2D^\circ$	}	-1	10,6	U.	
4099,96	10	$^2P - ^2D^\circ$		-1	10,6		
1200,70	10	^4P		+1	0,0		
1200,20		$^4S^\circ - ^4P$	}	0	0,0		
1199,50	3	^4P		-1	0,0		

(1) Memorias citadas. Estos *Anales* 118, página 88 y C. R. 199, pág. 1201.

λ I. A	I		Serie	Δl	Δj	E. P	Observaciones
	a	c					

P

2554,70	8	8					
2554,02	9	8					
2553,30	9	8	$^2P^\circ - \left\{ \begin{array}{l} ^2P \\ ^2P \\ ^2P \\ ^2P \end{array} \right.$	0	+1	2,33	U.
2536,38	10	10		0	0	2,33	
2535,60	10	10		0	0	2,33	
2534,75	8	8		0	-1	2,33	
2149,80	8	—	$^2D^\circ - ^2P$	+1	+1	1,42	
2136,80	8	—	$^2D^\circ - ^2P$	+1	+1	1,42	
1787,50	7		$^4S^\circ - \left\{ \begin{array}{l} ^4P \\ ^4P \\ ^4P \end{array} \right.$	-1	+1	0,0	
1782,70	7			-1	0	0,0	
1774,80	7			-1	-1	0,0	

As

2898,73	4R	6	$^2P^\circ - \left\{ \begin{array}{l} ^2P \\ ^2P \\ ^2P \\ ^2P \end{array} \right.$	0	+1	2,30	U.
2860,46	4R	8		0	0	2,23	
2780,23	8R	10		0	0	2,30	
2745,00	6R	5		0	-1	2,23	
2492,91	1	5	$^2D^\circ - \left\{ \begin{array}{l} ^4P \\ ^4P \\ ^4P \end{array} \right.$	+1	+1	1,31	$\Delta R = 2.$
2456,52	4R	7		+1	+1	1,35	$\Delta R = 2.$
2381,20	4R	5		+1	0	1,35	$\Delta R = 2.$
2370,77	4R	5	$^2P^\circ - ^2D$	-1	-1	2,30	
2369,67	4R	5	$^2P^\circ - ^2D$	-1	0	2,30	
2349,84	10R	5	$^2D^\circ - ^2P$	+1	+1	1,31	U.
2288,14	10R	3	$^2D^\circ - ^2P$	+1	+1	1,35	
1972,00	—	4R	$^4S^\circ - \left\{ \begin{array}{l} ^4P \\ ^4P \\ ^4P \end{array} \right.$	-1	+1	0,0	
1936,90	—	4R		-1	0	0,0	
1889,90	—	4R		-1	-1	0,0	

Sb

3267,48	10R	10	$^2P^\circ - ^2P$	0	0	2,03	
3232,52	10R	8	$^2P^\circ - ^2P$	0	0	2,28	
3029,80	8R	7	$^2P^\circ - ^2P$	0	-1	2,03	
2877,92	10R	10R	$^2D^\circ - \left\{ \begin{array}{l} ^4P \\ ^4P \\ ^4P \\ ^2P \end{array} \right.$	+1	+1	1,05	$\Delta R = 2.$
2769,94	9R	9R		+1	+1	1,22	$\Delta R = 2.$
2670,65	4R	4		+1	0	1,05	$\Delta R = 2.$
2598,08	6R	7R		+1	0	1,22	$\Delta R = 2; U.$
2528,53	6R	10R	^2P	+1	+1	1,22	U.
2311,50	6R	7R	$^4S^\circ - \left\{ \begin{array}{l} ^4P \\ ^4P \\ ^4P \end{array} \right.$	-1	+1	0,0	
2175,88	6R	3R		-1	0	0,0	
2068,38	4R	1		-1	-1	0,0	

λ I. A	I		Serie	ΔI	Δj	E. P	Observaciones
	a	c					

Bi

5552,24	8	3					
4722,50	10	8	$2D^\circ - 4P$	+1	+1	1,41	$\Delta R = 2$.
3397,21	5R	2	$2D^\circ - X_2$	?	?	1,41	
3067,73	9R	6R	$4S^\circ - 4P$	+1	-1	0,0	U.
3024,64	8R	4R	$2D^\circ - 4P$	+1	0	1,90	$\Delta R = 2$.
2993,34	9R	4	$2D^\circ - 3_3$	?	-1	1,41	
2989,04	9R	5R	$2D^\circ - 4$	?	0	1,41	
2938,31	10R	8R					
2897,98	10R	5R	$2D^\circ - \left\{ \begin{array}{l} 2P \\ 2P \\ 6 \end{array} \right.$	+1	+1	1,41	U.
2809,63	8R	2		+1	0	1,41	
2780,52	7R	4		?	+1	1,41	
2276,57	5R	2	$4S^\circ - 4P$	-1	0	0,0	
2061,71	8R	1	$4S^\circ - 4P$	-1	-1	0,0	

Columna V (b)

V

4881,57	10R	10	${}^4\text{F} - \left\{ \begin{array}{l} {}^4\text{D}^\circ \\ {}^4\text{D}^\circ \\ {}^4\text{D}^\circ \\ {}^4\text{D}^\circ \\ {}^4\text{G}^\circ \end{array} \right.$	+ 1	0	0,04	
4875,48	10R	10		+ 1	+ 1	0,04	
4864,73	10R	9		+ 1	+ 1	0,02	
4851,51	9	8		+ 1	+ 1	0,0	
4594,10	10R	10		- 1	- 1	0,07	
4462,37	9	9					
4460,31	10R	10R	${}^6\text{D} - \left\{ \begin{array}{l} {}^6\text{P}^\circ \\ {}^6\text{F}^\circ \\ {}^6\text{F}^\circ \\ {}^6\text{F}^\circ \\ {}^6\text{F}^\circ \\ {}^6\text{F}^\circ \\ {}^6\text{F}^\circ \\ {}^6\text{F}^\circ \\ {}^6\text{D}^\circ \\ {}^6\text{D}^\circ \\ {}^6\text{D}^\circ \\ {}^6\text{D}^\circ \\ {}^6\text{D}^\circ \\ {}^6\text{D}^\circ \\ {}^6\text{D}^\circ \end{array} \right.$	+ 1	+ 1	0,30	U.
4408,51	6R	10R		- 1	0	0,27	
4408,21	6R	1		- 1	0	0,27	
4406,65	8R	4R		- 1	0	0,30	
4400,59	9	10		- 1	- 1	0,26	
4395,24	10	10		- 1	- 1	0,26	
4384,73	10R	10		- 1	- 1	0,28	
4379,24	10R	10R		- 1	- 1	0,30	U.
4134,47	9	10		0	+ 1	0,30	
4132,00	10R	10		0	+ 1	0,28	
4128,08	10	10		0	+ 1	0,27	
4116,70	10R	7		0	0	0,26	
4111,79	10R	2		0	0	0,30	
4105,17	10	4		0	- 1	0,26	
4099,80	10	2		0	- 1	0,27	
3185,41	10R	2R	${}^4\text{F} - \left\{ \begin{array}{l} {}^4\text{G}^\circ \\ {}^4\text{G}^\circ \\ {}^4\text{G}^\circ \\ {}^4\text{G}^\circ \end{array} \right.$	- 1	- 1	0,07	U.
3184,00	10R	2R		- 1	- 1	0,0	
3183,99				- 1	- 1	0,04	
3183,42				- 1	- 1	0,02	

λ I. A	I		Serie	Δl	Δj	E. P	Observaciones
	a	c					

Nb

4137,13	10	4	${}^6D - \left\{ \begin{array}{l} {}^6F^\circ \\ {}^6F^\circ \\ {}^6F^\circ \\ {}^6F^\circ \\ {}^6F^\circ \end{array} \right.$	-1	-1	0,0	U. U.
4123,85	10	4		-1	-1	0,02	
4100,97	10	6		-1	-1	0,05	
4079,73	10	6		-1	-1	0,09	
4058,97	10	10		-1	-1	0,13	
3358,38	10	—					

Ta

6516,12	10	3					U.
6485,37	10	10					
6430,77	9	5					
6045,40	5	—					
5997,24	7	—					
5811,00	8	—					U.
3631,61	1	1					
3406,94	6	2					
3406,65	5	2					
3318,85	5	5					
3311,14	9	3					
3103,25	5	1					
2964,33	4	1					
2963,33	4	1					
2802,07	3	1					
2714,68	3	2					
2698,30	3	1					
2656,60	3	2					
2653,28	3	2					
2647,49	3	2					

Columna VI (a)

O

7775,68	6	${}^5S^\circ - \left\{ \begin{array}{l} {}^5P \\ {}^5P \\ {}^5P \end{array} \right.$	-1	$+1$	9,1	
7774,01	8		-1	0	9,1	
7771,97	10		-1	-1	9,1	
4641,83	—					
1306,12	10	${}^3P - \left\{ \begin{array}{l} {}^3S^\circ \\ {}^3S^\circ \\ {}^3S^\circ \end{array} \right.$	$+1$	-1	0,0	
1304,96	10		$+1$	0	0,0	
1302,27	10		$+1$	$+1$	0,0	

λ I. A	I		Serie	ΔI	ΔJ	E. P	Observaciones
	a	c					

S

9237,70	2		${}^5S^\circ - \left\{ \begin{array}{l} {}^5P \\ {}^5P \\ {}^5P \\ {}^5P \\ {}^5P \end{array} \right.$	-1	+1	6,5	
9228,20	2			-1	0	6,5	
9212,80	3			-1	-1	6,5	
4696,30	6			-1	+1	6,5	
4695,50	8			-1	0	6,5	
4694,20	10			-1	-1	6,5	
1826,40	6		${}^3P - \left\{ \begin{array}{l} {}^3S^\circ \\ {}^3S^\circ \\ {}^3S^\circ \end{array} \right.$	+1	-1	0,0	
1820,50	6			+1	0	0,0	
1807,40	6			+1	+1	0,0	

Se

4742,30	8		${}^5S^\circ - \left\{ \begin{array}{l} {}^5P \\ {}^5P \\ {}^5P \end{array} \right.$	-1	+1	5,95	
4739,10	9			-1	0	5,95	
4730,90	10			-1	-1	5,95	U.
2062,60	6		${}^3P - \left\{ \begin{array}{l} {}^3S^\circ \\ {}^3S^\circ \\ {}^3S^\circ \end{array} \right.$	+1	-1	0,32	
2039,70	8	8		+1	0	0,26	
1960,20	10R	10		+1	+1	0,0	

Te

3529,41	8R	—	${}^1D - {}^3S^\circ$	+2	+1	1,30	$\Delta R = 2.$
2769,65	9	4		+1	-1	0,58	$\Delta R = 2.$
2530,73	7	5	${}^3P - \left\{ \begin{array}{l} {}^5S^\circ \\ {}^3S^\circ \\ {}^3S^\circ \end{array} \right.$	+1	-1	0,58	U.
2385,78	10R	10R		+1	0	0,58	U.
2383,27	10R	10R		+1	0	0,58	U.
2265,52	5R	3	${}^1D - {}^1^\circ$	?	+1	1,30	
2259,02	8R	3	${}^3P - {}^5S^\circ$	+1	0	0,0	$\Delta R = 2.$
2255,50	5R	3	${}^1D - {}^2^\circ$	?	0	1,30	
2142,75	9R	1	${}^3P - {}^3S^\circ$	+1	+1	0,0	

Columna VI (b)

Cr

5409,80	10	8	${}^5D - {}^5P^\circ$	+1	+1	1,02	2e.
5208,43	10R	10	${}^5S - \left\{ \begin{array}{l} {}^5P^\circ \\ {}^5P^\circ \\ {}^5P^\circ \end{array} \right.$	-1	-1	0,94	
5206,42	10R	10		-1	0	0,94	
5204,54	9R	10		-1	+1	0,94	

JOSE S. CORTI



En la ciudad de Mendoza, donde habitualmente residía, ha fallecido el 17 de junio próximo pasado, el ingeniero José S. Corti, de larga y brillante actuación profesional, la que desarrolló simultáneamente con una intensa actividad en la enseñanza, a la vez que intervenía en sociedades industriales y científicas de diversa índole, todo lo cual daba a su figura relieves prestigiosos que lo destacaban entre las personalidades más salientes de la región cuyana. Cuando se constituyó en Mendoza la sección filial de la Sociedad Científica Argentina, fué elegido José S. Corti como su primer presidente.

Había nacido en 1861. En muy temprana edad, a las 16 años, ingresó como dibujante técnico en el Departamento Nacional de Ingenieros; en

los años 1881 a 1885 actuó en la Comisión de Estudios y Construcción del Ferrocarril Andino, planeando la vía de acceso a Mendoza y la prolongación hasta San Juan, a donde llegó en 1885, y donde formó su hogar. En 1887 obtuvo el título de Ingeniero Civil de la Universidad Nacional de Buenos Aires.

Radicado en San Juan, se le nombró profesor en la Escuela Nacional de Minas en 1891, llegando en 1893 al cargo de director de la misma. Fué también Ingeniero Jefe del Departamento Nacional de Ingenieros con asiento en San Juan, hasta 1899, fecha en la que pasó a ocupar el puesto de Jefe de la Cuarta Sección de Puentes y Caminos de la Nación, que comprendía las provincias de San Juan, San Luis y Mendoza. Esta jefatura la desempeñó hasta 1917, en que se acogió a los beneficios de la jubilación.

Aparte de los trabajos propios de su Sección, en cuanto se refería a puentes y caminos, continuó siempre ocupándose de estudios y construcciones ferroviarias. En 1901 intervino en la ejecución del túnel cordillerano para el Ferrocarril Trasandino Argentino; dirigió la construcción del monumento al Cristo Redentor en la Cordillera; proyectó las primeras construcciones de cemento armado que se hicieron en Mendoza (1903); ejecutó por encargo del gobierno provincial el primer camino de macadam en Mendoza (1907), desde la Capital a la Villa Nueva de Guaymallén, etc.

Sus profundos conocimientos matemáticos tuvieron una interesante aplicación, cuando en 1911 fué designado perito para dirimir una controversia de orden técnico-legal entre los ferrocarriles Gran Oeste Argentino y Oeste de Buenos Aires, acerca de la posición exacta del paralelo 35° Sud en las proximidades de Colonia Alvear (Mendoza). El trabajo de Corti, a base de observaciones astronómicas de precisión y de métodos de cálculo de gran exactitud constituye una contribución de alto valor científico para la resolución de muchas cuestiones geodésicas. En 1912, proyectó y construyó el Observatorio Astronómico de Mendoza.

En 1913 fué nombrado profesor en la Escuela Nacional de Vitivinicultura de Mendoza: en 1915, formó parte de la Comisión Especial que estudió el camino carretero a Chile, y a él se le debe la troza adoptada más tarde por la Dirección Nacional de Vialidad entre las Termas de Villavicencio y la Cruz del Paramillo.

El ingeniero José S. Corti, pertenecía a la Sociedad Científica Argentina desde 1902; a la American Society of Civil Engineers, desde 1896; y a numerosas otras instituciones científicas y profesionales del país y del extranjero.

Aparte de lo anteriormente señalado, tuvo también una amplia actuación en los círculos locales, habiendo sido Profesor honorario en la Universidad popular de Mendoza, Presidente del Consejo Administrativo de la Enseñanza Pública Provincial, Director General interino de Escuelas, etc. Su labor periodística es copiosa, habiendo tratado múltiples temas de astronomía, matemáticas e ingeniería, con galanura de estilo y profundos conocimientos acerca de los temas que estudiaba.



BIBLIOGRAFIA

FOLLETOS RECIBIDOS EN LA ACADEMIA NACIONAL DE CIENCIAS

POR C. C. D.

Actualités Scientifiques et Industrielles. Folletos (16 ½ cm × 25 ½ cm) editados por Hermann & Cía., París. Número de páginas y precios variables. Se detallan a continuación los últimos remitidos, siguiendo la numeración consecutiva.

Nº 471. — UNGAR (GEORGE), *Les Substances Histamínicas et la Transmission chimique de l'Influx Nerveux. L'Histaminergie normale et pathologique*. 90 páginas, con algunas figuras y una lámina; 20 fr.; 1937.

Fascículo X de la serie «Exposés de Physiologie», dirigida por André Mayer.

El autor, doctor en ciencias, hace presente en una Introducción, que actualmente, se admite que todo cambio de composición cualitativa o cuantitativa del medio interno modifica las funciones orgánicas; y que esa modificación puede significar una regulación.

Después de esa Introducción, trata sucesivamente las sustancias histamínicas; su intervención en los procesos fisiológicos; los procesos patológicos locales y generales; la histaminergia normal y patológica. Y al final, una nutrida bibliografía.

Las conclusiones son que el papel fisiológico y patológico de las sustancias histamínicas no es ya discutible, pero que sus modalidades pueden ser concebidas de distintos modos; la histamina puede considerarse como una sustancia animal accidental formada únicamente por la acción de microorganismos, o de destrucciones celulares; o bien que se trate de una hormona verdadera con su metabolismo fisiológico propio y desempeñando una misión en la regulación normal de la circulación. El autor acepta esta última hipótesis.

Nº 495 a 497. — SCHREIDER (EUGENE), *Les Types Humains*. Tres folletos respectivamente: 104 páginas, 8 láminas fuera de texto, 20 francos; 80 páginas, 18 francos; 106 páginas y 5 láminas fuera de texto, 20 francos. 1937.

Constituyen los fascículos III, IV y V de la serie «Biologie du Travail et Biotypologie» dirigida por H. Laugier. El autor es bibliotecario archivero de la Sociedad francesa de Biotipología.

El primer folleto se ocupa de los tipos humanos somáticos, raciales, morfológicos, constitucionales. El segundo de los tipos psicológicos: temperamentos, caracteres, tipos de orientación general del espíritu; tipos psicoanalíticos; tipos reflexiólogos; tipos psicosociólogos. El tercero se ocupa de los tipos somatopsíquicos; variedades neurovegetativos; constituciones somatopsíquicas; biotipos y variedades endocrinológicas; tipos criminales. En una introducción el autor hace presente que ha debido proceder a una «clasificación de las clasificaciones». Estos folletos traen interesantes datos y una copiosa bibliografía.

Se ha dicho muchas veces que las especies han sido imaginadas para la comodidad de los sabios, pero que en realidad solo existen individuos; el autor insiste en que hay mucha verdad en tal aserto, pero que él no es absoluto. Se esfuerza el profesor Schreider en ordenar lo que ha sido hecho desde un siglo atrás y desde distintos puntos de vista, a fin de poner luz en la multitud de tipos humanos.

Nº 501. — DRABOVITCH (W.), *Les Réflexes Conditionnés et la Psychologie Moderne*. 70 páginas; 155 francos. 1937.

Fascículo IV de la serie «Physiologie Générale du Système Nerveux», dirigida por Luis Lapicque, del Instituto de Francia y profesor honorario de la Sorbona.

Después de un prefacio escrito por Lasique, el autor desarrolla el tema en cinco capítulos en los que define los reflejos condicionados; trata los reflejos y la tendencia; las fases sucesivas del desarrollo de la doctrina de los reflejos condicionados, los ejemplos concretos y la cronaxia; la naturaleza psicológica del reflejo condicionado.

El autor es discípulo de J. P. Pavlov. «Gracias al capital descubrimiento de H. Berger, de las ondas corticales, un nuevo y magnífico puente se ha estado tendiendo entre la fisiología y la psicología, y especialmente con los estudios de Adrian y Matthews, de Kornmuller, de Jasper». Pensamiento, vida afectiva, voliciones, complejos inconcientes o subconcientes se vinculan cada vez más y más sólidamente con la actividad nerviosa y cerebral, con la vida del cuerpo entero. Los «electrencefalogramas», de Berger, ponen de manifiesto un vínculo íntimo entre los movimientos de atención, las percepciones, las emociones, la vigilia y el sueño y las ondas cerebrales.

Nº 502. — CURIE (MAURICE) y PROST, *Nécessaire mathématique*; 116 páginas, 44 figuras; 20 francos. 1937.

Maurice Curie es profesor de la Facultad de Ciencias de París. M. Prost es su asistente.

El bagaje matemático que trae este libro está dedicado a los jóvenes estudiantes que aspiran al certificado de estudios de física, y al de estudios superiores. Procura darles las bases necesarias para consultar sin grandes dificultades un tratado de Matemáticas Generales. Los capítulos se ocupan sucesivamente de las nociones de Álgebra elemental; Trigonometría; Representación gráfica de funciones de una variable; Cálculo de derivadas;

Series, logaritmos y función exponencial; Infinitamente pequeños y diferenciales.

Una nota sobre errores y aproximaciones en las medidas y cálculos numéricos y físicos; otra sobre grandores, unidades y homogeneidad de las fórmulas; y un anexo relativo a las nociones de cálculo de probabilidades, terminan el libro. Algunas definiciones dejan algo que desear, pero el trabajo puede sin duda prestar servicios a los jóvenes en obsequio de quienes han sido escrito.

Nº 516. — RENAUD (PAUL), *Analogies entre les Principes de Carnot, Mayer y Curie*. 48 páginas, 10 francos. 1937.

Fascículo VIII de la serie «Exposés de Physique Théorique», dirigida por Luis de Broglie.

El autor, doctor en ciencias, pone de manifiesto que los tres principios de Carnot, Mayer y Curie, se presentan como cosas ciertas del punto de vista teórico, pero que, en la práctica, sus comodidades o utilidades, aunque inmensas en ciertos dominios pueden resultar nulas en otros. Esto es al menos la conclusión del estudio, el cual ha sido encarado en el sentido de averiguar si el principio de Curie generalizado puede ser expresado analíticamente en forma análoga a los otros dos.

Al efecto hace el autor un examen detenido de los principios de la energía, del de Carnot, del de Curie generalizado;; de las relaciones entre los tres principios en cuestión, de los movimientos perpetuos del flujo. Después de formular las conclusiones, trae un apéndice relativo a consideraciones sobre los sistemas de gran número de parámetros. La clasificación determinista debe regir para que esos principios resulten absolutos, satisfaciendo entonces un voto de Enrique Poincaré.

Nº 517. — HAÏSSMSKY (M.), *Le Polonium*. 44 páginas con algunos gráficos, 12 francos. 1937.

Es el fascículo I de la serie «Radioactivité», dirigida por el profesor de la fórmula y director del Instituto de Radio A. Debierne. El autor pertenece a dicho Instituto de Radio (de París).

Sucesivamente se exponen nociones generales; propiedades nucleares; acciones químicas y fisiológicas; propiedades físicas, químicas y electroquímicas; propiedades coloidales y de absorción; preparación y purificación de las fuentes del polonio. Al final, la bibliografía.

Recordemos que el polonio, o radio F, descubierto en 1898, mereced a sus propiedades radioactivas, por los esposos Curie, pertenece a la familia radioactiva Uranio-Radio. Es el producto inmediato de la desintegración de RaE, isótopo de Bi, y se desintegra, a su vez, con emisión de rayo alfa, dando el radio C₁, isótopo inactivo del plomo y último término de la familia.

Nº 529. — DUCLAUX J., *Mouvement Brownien*. 96 páginas con algunas figuras; 25 francos. 1937.

Constituye el capítulo V del tomo II del «Tratado de Química-Física» del autor. Y en la serie general pertenece a la serie «Leçons de Chimie

physique appliquée à la Biologie», dirigida también por dicho profesor del « Collège de France ».

Después de una introducción de carácter histórico, y en la que pone de manifiesto, por un lado, la elegancia de las doctrinas de Einstein y Smoluchowsky, y por otro, la debilidad de la teoría del movimiento browniano, entre en materia, estudiando o exponiendo el carácter calificativo; las verificaciones experimentales de la teoría molecular; el estudio de las emulsiones; los diversos aspectos del movimiento browniano; el movimiento browniano en los gases; el efecto Ludwig-Soret. Al final, la bibliografía.

Nº 542-543. — YVON (J.), *Recherches sur la Théorie Cinétique des liquides*.

Dos folletos respectivamente de 66 y 76 páginas; 18 francos cada uno. 1937.

Fascículos VII y VIII de la serie « Théories Mécaniques Hydrodynamique-Acoustique » dirigida por Y. Rocard.

El primer fascículo trata *Las Fluctuaciones en densidad*; el otro *La Propagación y la Difusión de la Luz*. El autor es un ex-alumno de la Escuela Normal Superior de París y profesor en el « Lycée Henri IV ».

Tiene por objeto este trabajo (de física matemática) el estudio teórico de la difusión (sin cambio de longitud de onda) de la luz, por un fluido monoatómico; y la elección de un método estático. La teoría cinética, tal cual ha sido codificada por Gibbs, parece convenir para tratar los problemas relativos a los líquidos. Primero se estudian las fluctuaciones en densidad; luego estas mismas en concentración dentro de mezclas binarias; luego se da un esquema de una representación térmica en un fluido de forma ondulatoria el cual, en contra de las concepciones de Einstein, toma en cuenta la estructura molecular de los fluidos.

El segundo folleto es continuación del primero, y ambos buscan el estudio teórico de la difusión de la luz por un fluido monoatómico despreciando los cambios de longitudes de onda. Una etapa intermedia se franquea con un examen del problema de la refracción. Primero se trata la teoría cinética de la constante dieléctrica de un líquido monoatómico no polar. Numerosas referencias son dadas al final de cada folleto.

Nº 544. — ROCARD (Y.), *Les Phénomènes d'auto-oscillation dans les installations hydrauliques*. 69 páginas, con algunas figuras; 18 francos. 1937.

Fascículo IX de la serie « Théories Mécaniques Hydrodynamiques-Acoustique » dirigida por el autor.

A pesar del término « hidráulique » que se usa en el título, es en realidad un problema de acústica el que trata el autor. Las investigaciones que motivaron, hace algunos años, la catástrofe del Lago Negro, son las que inspiran este trabajo que es, en resumen, de naturaleza físico-matemática.

Después de un prefacio y de una Introducción, se precisa cual es el objeto del libro, o sea, abordar el estudio de fenómenos complejos como son aquellos relativos a un conducto acoplado con un sistema mecánico susceptible de movimiento, cuyos desplazamientos provocan una reacción sobre el

escurrimiento del fluido. Ese sistema puede, por sí mismo, estar con oscilación. La primera parte del libro trata la autooscilación del agua en conductos alimentados por máquinas de características conocidas y munidas de un órgano capaz de vibrar modulando el gasto; la segunda parte comporta extensiones diversas de la teoría de la autooscilación; y la tercera, una extensión al caso de una red hidráulica compleja.

Nº 547. — RIVAUT (R.), *Contribution à l'étude des Régions Ionisées de la Haute Atmosphère*. 90 páginas con 39 figuras. 1937.

Después de una Introducción y un plan de división del trabajo, el autor divide su estudio en tres partes en las que trata respectivamente el fenómeno de los eos, el proceso del reenvío al suelo de la energía electromagnética; y de las imágenes múltiples. Al final las conclusiones y la bibliografía.

Los resultados a que llega el autor pueden clasificarse en tres categorías: los que confirman los alcanzados por otros autores, o que precisan algunos detalles poco desarrollados hasta entonces; los que aunque confirman los resultados de observaciones ya hechas, parecen al autor ser importantes y han sido especialmente objeto de su atención. Lo que parece nuevo relativamente a la observación de ondas de 4 m y de 4,5 m y en los resultados que el trabajo aporta en la cuestión, son materia de la última parte del folleto.

Nº 549. — BRILLOUIN (LEÓN), *La Structure des Corps Solides, dans la Physique moderne*. 56 páginas con algunas figuras. 18 francos. 1937.

Es el fascículo II de «Bibliothèque de la Société Philomathique de París».

El autor previene en un Prefacio que su trabajo no es ni riguroso ni completo: en el curso de sus lecturas en libros antiguos o modernos ha hecho anotaciones interesantes y discusiones sugestivas y es una vinculación de esos fragmentos y un esquema de la evolución de las ideas relativas a la estructura de los sólidos que contiene el folleto que nos ocupa. Se limita a las propiedades estáticas de los sólidos. Cuando se conozcan con certeza las propiedades de los sólidos se verán probablemente aparecer los límites de sus condiciones de estabilidad y prever las de la fusión. Los puntos tratados siguen el siguiente orden: Introducción; sólido, líquido y gas; estructura de las diferentes facies; estructura de los cristales, sus elementos constitutivos; naturaleza de las fuerzas de cohesión, hipótesis esenciales; las relaciones de Cauchy, histórico; teorías de Poisson y Kelvin, discusiones; solución de Voigt y de Born; ¿a qué se parece un átomo en mecánica ondulatoria? átomos de simetría esférica; estructura de las redes cristalinas, red simple y red con base; los metales y sus redes; las relaciones de Cauchy y los resultados de las mediciones; agitación térmica, ecuaciones de estado; cómo verificar esa teoría? Conclusiones.

Nº 550. — CARTAN (LUIS), *Spectrographie de Masse. Les Isotropies et leurs masses*. 92 páginas con 24 figuras y 4 láminas fuera de texto. 20 francos. 1937.

En el fascículo VI de la serie «Exposés de physique atomique expérimentale» dirigida por Mauricio de Broghe. Este último ha escrito el prefacio del libro que nos ocupa, en el que recalca la importancia que la espectrografía de las masas tiene para la física del núcleo: desempeña el mismo papel que el de la balanza cuando se fundó la química; además aporta indicaciones sumamente precisas, del punto de vista de la estabilidad de los núcleos complejos y de las energías de vinculación; en ese dominio donde la ley de Einstein parece ahora bien establecida, la medida de las masas está estrechamente ligada con la de las energías.

De ahí y de otras consideraciones se desprenden los servicios que el libro de Cartan esté llamado a prestar a todos los físicos que se interesen en tales cuestiones. Después de una Introducción, siguen tres partes principales: una se ocupa de las masas; otra de los isótopos, y la última de la Estadística isotrópica y energías de vinculación nucleares... Al final una tabla general de los isótopos naturales, y una bibliografía.

Nº 551. — WEIL (ANDRÉ), *Sur les Espaces à Structure uniforme et sur la Topologie Générale*. 40 páginas, 15 francos. 1937.

Se trata del fascículo primero de las «Publicaciones del Instituto de Matemáticas de la Universidad de Estrasburgo».

El autor, después de observar que la noción de *distancia* es utilizada en muchos trabajos sobre topología a pesar de que es una especie de intrusa en este ramo; y de que su empleo está, a su vez, fundado en la posibilidad del mismo en todo espacio localmente compacto que satisfaga al segundo axioma de la *enumerabilidad*, lo que importa, por consiguiente, la hipótesis de lo enumerable (o de la separabilidad), «parásito que infecta tantos libros y memorias cuyo alcance disminuye a la vez que perjudica la clara comprensión de los fenómenos»; y luego después, igualmente, de otras consideraciones por el estilo, pregunta: ¿cuál cosa habrá de sustituir esas nociones?

Manifiesta que cuando se procura raciocinar sobre los grupos topológicos, se comprueba que se hallan en ellos muchas propiedades conocidas de los espacios métricos, pues esas propiedades tienen un origen común, que es sencillamente la posibilidad de comparar entre sí las vecindades que se dan en todos los puntos del espacio; ello basta para establecer casi todas las propiedades esenciales de los espacios métricos; y es lo que el autor se propone hacer ver en este trabajo desarrollado en 7 capítulos.